

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

FORD, H.: The Theory of Plasticity in Relation to its Engineering Applications	1
GREGORIC, R.: Hautkondensation an feingewellten Oberflächen bei Berücksichtigung der Oberflächenspannungen	36
RADOK, J. R. M., und HELLER, A.: Die exakte Lösung der Integralgleichungen gewisser Schwingungsprobleme	50
POPOFF, K.: Sur la thermodynamique des processus irréversibles	67

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

SEN, B.: Note on Two-Dimensional Indentation Problems of a Non-Isotropic Semi-Infinite Elastic Medium	83
SINDEN, F. W.: Ein Oszillationssatz für algebraische Eigenwertprobleme	86

Varia - Miscellaneous - Divers

Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 20. bis 24. April 1954, in München	88
Internationale Tagung über Halbleiter in Amsterdam vom 29. Juni bis 3. Juli 1954	88
Errata: MELCHER, D.: Experimentelle Untersuchung von Vereisungserscheinungen	89
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	89

ZAMP	Vol. V	Fasc. 1	Pag. 1-94	15. 1. 54
------	--------	---------	-----------	-----------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten von Fr. 15.—* pro Seite zu entrichten. Für Arbeiten, die mehr als 24 Seiten Umfang aufweisen, bedarf es einer Verständigung mit der Redaktion.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of Fr. 15.—* per page exceeding these 16 pages. In case of articles of more than 24 pages, a special arrangement has to be made with the Editor.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de Fr. 15.—* doit être payée par page supplémentaire. Dès qu'il s'agit de 24 pages ou plus, l'auteur est prié de se mettre en relation avec la rédaction.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.—, Ausland Fr. 48.—, Einzelnummer Fr. 10.—

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.—, foreign Fr. 48.—, single copy Fr. 10.—

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.—, étranger Fr. 48.—, le numéro Fr. 10.—

Postabonnement – Post-Office Subscription – Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg
Italien

Dänemark
Marokko

Deutschland
Norwegen

Finnland
Portugal

Holland
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.—, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 88.—, $\frac{3}{4}$ Seite/page: Fr. 50.—

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. – All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. – Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés

Copyright 1954 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

5756-21

The Theory of Plasticity in Relation to its Engineering Applications

By HUGH FORD, London¹⁾

Nature of Plastic Deformation

There are two main approaches to the study of plastic deformation: these may be termed the 'microscopic' and the 'macroscopic'.

The 'microscopic' line of study is that which is variously called 'metal physics', 'physics of single crystals', etc. and which relates the behaviour of crystalline aggregates to fundamental ideas of the deformation of single crystals. It is possible to formulate some general notions of the theoretical strength and cohesion of materials and of the nature of shear arising from dislocations in regular crystal structure [1], [2], [3]²⁾. Lately HILL and BISHOP [4] have been preparing the way for building up a mathematical theory of plasticity in polycrystals from single crystal behaviour, but so far only general theorems are being studied.

The 'macroscopic' approach is that in which the material is assumed to be an agglomerate without a crystalline structure. The mathematical theory of plasticity deals with idealized materials of this kind, and examines analytically their behaviour when subjected to complex stress conditions. Its purpose is to develop mathematical techniques for calculating non-uniform distributions of stress and strain in bodies permanently distorted in any way. Leading out of the strict theory is the 'technological' study: use is made on the one hand of the relationships of the mathematical theory and on the other of experimentally determined laws and criteria to establish technically important results.

A full treatment cannot be given in one paper: all that can be done is to discuss the basic laws of the mathematical theory and review some of the techniques used for solving problems. A few examples of the application of these laws and techniques to the study of industrial processes will then be given.

One of the difficulties in interpreting the mathematical theory of plasticity is that the behaviour of technical materials when under load in the plastic range depends upon their structure and the problems presented by a complete analysis of anisotropic, non-homogeneous materials are too complex to attempt a solution by our present methods. It is in fact remarkable that metallic materials behave so nearly to that predicted by theory from consideration of idealized

¹⁾ Department of Applied Mechanics, Imperial College, University of London.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 34.

materials, but we must always remember that the anisotropic, crystalline nature of metals must intrude sooner or later and modify the results predicted from simple theory.

The mathematical theory must, therefore, make certain assumptions and generally these are:—

(1) Isotropy. Theory for anisotropic material is not yet very far advanced [5].

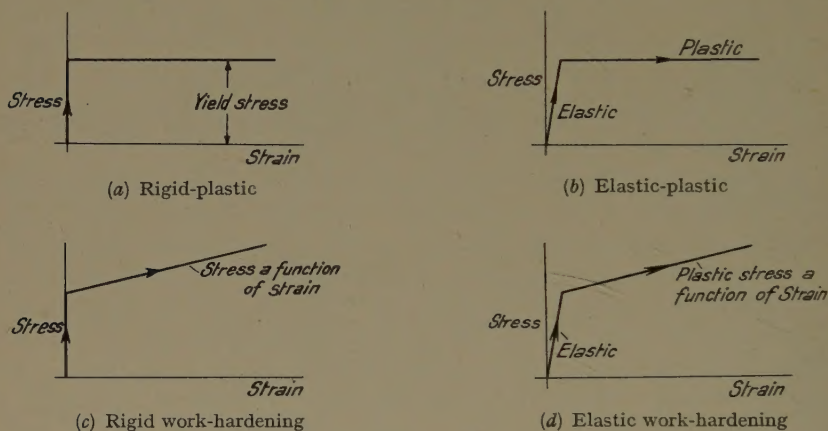


Figure 1

- (2) Sharp yield with no hysteresis on loading and unloading. No change in elastic moduli with the degree of deformation.
- (3) No Bauschinger effect—one basic yield stress relation for tension and compression.
- (4) No temperature effects. Yield stress independent of time rate of strain, no creep or recovery.
- (5) Idealized stress-strain relations (Figure 1).

In large deformations it is possible to obtain complete solutions by a step-wise graphical solution, taking small strain increments over which the yield stress is considered constant (Figure 2).

Actual stress-strain curves can be approximated to types (c) and (d) with reasonable success and although the sharp yield does not usually occur, suitable experimental techniques can be used, as will be shown later.

The theory of perfectly plastic solids with no elastic region can be satisfactorily applied to work-hardening materials. This theory has wide applications, particularly for large deformations where the elastic strains are an insignificant part of the whole. When we determine that, even for the highest strength steel, the elastic strain does not exceed 0.5 per cent, this theory applies very generally in practical problems.

There are two principal types of elastic-plastic problem: That in which all the material reaches yield at the same instant, but yielding depends upon the elastic strain pattern, the plastic strains being of the same magnitude, and that in which there is an elastic-plastic interface and the elastic region presents a restraint to unrestricted flow. The equations of flow involve the generalized HOOKE's law equations, and the elastic and plastic strains are of the same

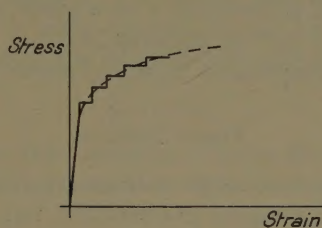


Figure 2

order. Only a few cases have been solved, a high degree of symmetry usually being necessary, and the shape of the elastic-plastic interface must be predictable [5].

The General State of Stress

The stress at a point can be defined in terms of six stress components.

Three normal stresses

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$$

and three shear stresses

$$p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$$

according to any arbitrary Cartesian co-ordinates [6].

Alternatively, a state of stress is uniquely defined by its three principal stresses:

$$p_1, p_2, p_3$$

and the directions of these stresses in space.

A given state of stress at a point does not depend upon the directions of the arbitrary co-ordinates chosen in the first place, and, therefore, there can only be one set of principal stresses and axes.

In terms of the general stress components $p_{xx}, p_{yy}, \dots, p_{zx}$, the principal stresses are the three roots of the equation

$$p^3 + J_1 p^2 + J_2 p + J_3 = 0 \quad (1)$$

where

$$J_1 = -(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}), \quad (1a)$$

$$J_2 = (p_{xx} p_{yy} + p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx} - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2), \quad (1b)$$

$$J_3 = -(p_{xx} p_{yy} p_{zz} + 2 p_{xy} p_{yz} p_{zx} - p_{xx} p_{yz}^2 - p_{yy} p_{zx}^2 - p_{zz} p_{xy}^2). \quad (1c)$$

For a given state of stress the quantities J_1 , J_2 , and J_3 must be constant, i.e. they are invariants to orthogonal transformations of co-ordinates.

Notation: p_{xx} = stress in direction x on a plane x (normal),

p_{xy} = stress in direction x on a plane y (shear).

Principal stresses $p_1 > p_2 > p_3$ algebraically.

Tension is positive, compression negative, unless otherwise indicated.

Tensor Notation

In the generalized statement of the mathematical theory of plasticity, tensor notation allows a clear and concise presentation, but, since the greater part of the paper deals with particular problems and processes, it will not be used here. Reference should be made to HILL [5].

Yield

Suppose the intensity of a state of stress at a point in an idealized material gradually increases, passing through a series of stress states, when does the first permanent change of shape occur?

For isotropic materials, over the range of stresses normally encountered in technology, yielding is found to be independent, over the practically significant range, of hydrostatic stress (i.e. the mean stress) being dependent only on stress *differences* [7].

Denote the hydrostatic stress by

$$\bar{p} = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}. \quad (2)$$

The stress deviations are then

$$p'_{xx} = p_{xx} - \bar{p} = \frac{2 p_{xx} - p_{yy} - p_{zz}}{3}. \quad (3)$$

Note:

$$p'_{xy} = p_{xy}.$$

In terms of the stress deviations (3), equation (1) becomes

$$p'^3 + J'_2 p' + J_3 = 0, \quad (4)$$

where

$$J'_2 = (p'_{xx} p'_{yy} + p'_{yy} p'_{zz} + p'_{zz} p'_{xx} - p'^2_{xy} - p'^2_{yz} - p'^2_{zx}), \quad (4b)$$

$$J'_3 = -(p'_{xx} p'_{yy} p'_{zz} + 2 p'_{xy} p'_{yz} p'_{zx} - p'_{xx} p'^2_{yz} - p'_{yy} p'^2_{zx} - p'_{zz} p'^2_{xy}). \quad (4c)$$

Now yielding can only depend on the magnitude of the state of stress and must be independent of the orientation of the co-ordinate axes, i.e. it can only be a function of J'_2 and J'_3 .

Also we have assumed that there is no Bauschinger effect so yield must not depend upon change of sign of the stresses.

J'_2 is unaltered by change of sign, but J'_3 is, and yielding would, therefore, need to be an even function of J'_3 . This would soon lead to complicated functions for yielding. While it must be remembered that yielding could be *any* suitable function of J'_2 and J'_3 the simplest is clearly to take

$$J'_2 = \text{const.}$$

This is the von Mises yield criterion; CLERK-MAXWELL in 1865 first proposed it on mathematical grounds, but other interpretations have been put forward [8], [9], [10].

By carrying out a simple tensile or compression test, the yield stress can be determined. Alternatively, torsion of a thin tube allows the shear yield stress in torsion to be found.

Denoting the shear yield stress in the tension or compression test by k (i.e. the yield stress measured in the test would be $2k$) the von Mises criterion is written as:

$$(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2 = 8k^2 \quad (5)$$

or, for general co-ordinates as:

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 + (p_{yy} - p_{zz})^2 + (p_{zz} - p_{xx})^2 + 6p_{xy}^2 + 6p_{yz}^2 + 6p_{zx}^2 = 8k^2. \quad (5a)$$

Based on the torsion shear stress k^* , we obtain:

$$(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2 = 6k^{*2}. \quad (5b)$$

The other practically important criterion is the *Tresca criterion*, sometimes called GUEST's law because GUEST (1900) first appreciated its practical value and carried out accurate tests with combined stress conditions. It is practically simpler and takes

$$\frac{p_1 - p_3}{2} = \text{const.}$$

This criterion ignores the effect of the intermediate stress p_2 . The greatest difference between the two criteria is about 15.5 per cent. For a great number of problems, particularly for plane strain, the two criteria give the same result except for a constant. The constant can be adjusted so that results never differ by more than 7.75 per cent.

For rigid-plastic or elastic-plastic materials we take $J'_2 = \text{const}$ for all stress states irrespective of total strain. For work-hardening materials, $J'_2 = \text{const}$ only for an increment of strain. The constant then becomes a parameter, determinable from the yield stress-strain curve, in a manner to be explained later.

Limiting Stress Fields

PRAGER and HODGE [11] and HILL [12] have discussed the graphical representation of the limiting conditions of yield by the Tresca and von Mises criteria. These representations are useful in considerations of testing plasticity laws.

The Law of Plastic Flow

When yield has occurred, what is the resulting strain distribution?

If the stress is uniform, the amount of the strain depends upon the external conditions of restraint or, in the case of a work-hardening material, on the rate of work-hardening.

Usually, however, we have non-uniform stress distributions, and the amount of deformation depends upon the stress pattern as well as the boundary conditions.

DE SAINT-VENANT (1870) [13] stated the law that the directions of the *increments* of the principal strains coincide with the directions of the principal stresses. In this statement DE SAINT-VENANT recognized that linear relation between stress and strain does not exist in plasticity as it does in elasticity. With plastic deformations, which may be very large, the general displacements of the material may be such that the directions of principal stress throughout the plastic mass will, and generally do, change. So we must follow the increments of plastic strain which result from a given stress condition.

How big are the increments we are talking about? In theory, they are infinitesimal since theoretically there is no difficulty in passing through an infinity of stress states. In practical cases, the increments will be anything from 0.1 per cent strain to 1 or even 3 per cent strain. A crude criterion is to say that the increments can be as large as can be considered not to change the stress distribution to such an extent that the principal stresses change direction.

LÉVY [14] first proposed that, over these strain increments, the strain is proportional to the stress. In terms of the deviatoric stresses, the relations are

$$\frac{\delta e_{xx}^P}{p'_{xx}} = \frac{\delta e_{yy}^P}{p'_{yy}} = \dots = \frac{\delta e_{zz}^P}{p_{zz}} \quad (6)$$

These relations were restated by VON MISES many years later [15]. They are usually called the Lévy-Mises equations.

Where both the elastic and plastic strains have to be allowed for—and strictly they should be in all cases—REUSS [15] put forward the following equations

$$\delta e_{xx} = \delta e_{xx}^E + \delta e_{xx}^P = \frac{p'_{xx}}{2G} + \lambda p'_{xx} \dots \quad (\text{three equations}), \quad (7)$$

$$\delta e_{xy} = \frac{p_{xy}}{2G} + \lambda p_{xy} \dots \quad (\text{three equations}). \quad (8)$$

In all these equations δ before the strain indicates that a strain increment must be taken, not the total strain. The factor λ is an artifice which represents the plastic strain increment as proportional to the deviatoric stress: it is not, however, a constant as in elasticity but varies not only from moment to moment but from point to point.

Using the Reuss or the Lévy-Mises equations depends upon whether the plastic strains are comparatively large or small, or whether the elastic material acts as a restraint to the plastic region. Where the elastic strains are ignored in the latter, there is a likely discontinuity since at the plastic-elastic interface a sudden change of strains will occur because the lateral contraction ratio will change over from POISSON'S ratio of about 0.3 in the elastic range to a value of 0.5 in the plastic range.

Condition of Constant Volume for Change of Shape

This last statement means that we assume constancy of volume in the plastic range

$$\delta e_{xx}^P + \delta e_{yy}^P + \delta e_{zz}^P = 0. \quad (9)$$

Accurate measurements on materials heavily deformed plastically show this assumption to be very closely supported. Apart from material consolidation owing to internal cracks, blowholes, etc., materials do not change volume by more than a very small fraction of one per cent.

Work-Hardening

We can determine for pure shear or simple tension, the work-hardening curve of the material, but we must now ask the question 'with a *complex* stress state, what is the new value of k after a given set of increments of the plastic strains?' We assume that the hardening takes place isotropically and the usual answer is that the new k depends upon the work done, i.e.

$$J_2' = F(W^P) = F\left(\int p^* \delta e^*\right), \quad (10)$$

where p^* = equivalent stress,

δe^* = equivalent strain increment.

These work functions can be evaluated from the stress-strain curve in simple tension or in torsion [16].

An alternative and usually more useful basis is the total amount of strain, i.e.

$$J_2' = H\left(\int \delta e^*\right). \quad (10a)$$

Either basis appears to give satisfactory results.

Solution of the General Problem

In general, we have nine unknowns; six stress components and three displacement increments. We have nine relationships; three equilibrium equations, constancy of volume, yield criterion and four (independent) stress-strain increment relations (LÉVY-MISES or REUSS). Although there are six of these, two are inherent in the other relations. Alternatively we can use the statement that the principal stress and strain increment axes coincide and the three stress-strain increment relations to make four as before.

Elastic-Plastic Problems

The complete solution of a general problem in plasticity involves a calculation of the stress and deformation in both the elastic and plastic regions.

The solutions in the elastic and plastic regions are interrelated by certain continuity conditions in the stresses and displacements which must be satisfied along the plastic-elastic boundary. The boundary itself is usually one of the unknowns and is usually of such an awkward shape that even the stress distribution in the elastic region can only be obtained by laborious numerical methods. The complete and accurate solution of the plastic problem is practicable in relatively few cases.

HOHENEMSER [17] attempted an experimental confirmation of the Reuss equations. The results were not conclusive, but the agreement was probably as good as could be expected in view of the uncertainties of this sort of experiment: hysteresis, the rounding of the yield point, anisotropy, etc. Such secondary factors tend to prevent these tests being critical when the strains are small. More recent tests by MORRISON and SHEPHERD [18] were in substantial agreement with the Reuss equations.

Plastic Bending under Tension

We shall first consider a problem in which the plastic and elastic regions both exist. The simple punch and die assembly, Figure 3, starts with a flat blank and as the punch penetrates the die, so the blank is drawn over the die radius into a cylindrical form around the punch, until all the radial blank has passed over the die radius into the die throat.

SWIFT [19] has found that the amount of thinning of the cupwall is much greater than would be expected from simple drawing theory, and has shown that this arises from bending the plate plastically (at *A* and *B*) under a tensile load in plane strain. (Plane, because the sudden change from a flat plate to the die radius and vice versa occurs with zero circumferential strain). Consider a beam undergoing plastic bending (Figure 4).

We cannot assume that the neutral axis NN coincides with the mid-fibre CC because there is an out-of-balance tension over the section corresponding to the radial pull P .

$$P = \int p_r dy .$$

The distance y_N will depend upon the extent of the plastic and elastic regions.

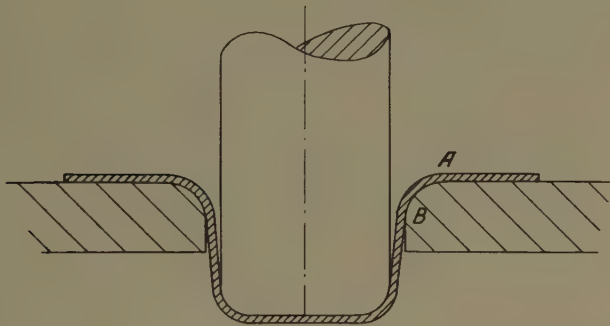


Figure 3

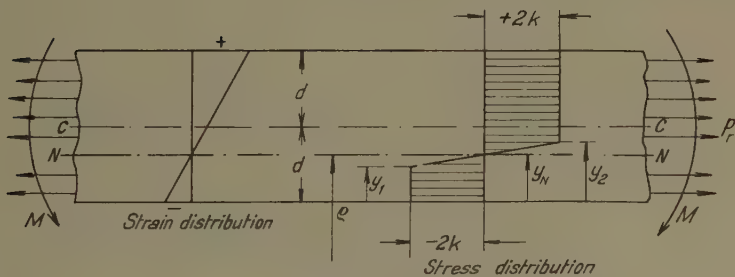


Figure 4

Over the elastic region $y = y_1$ to y_2

$$p_r = a + b y \quad (\text{straight line law}).$$

At the limits of the plastic zone $p_r = 2 k$, the yield stress in plane strain. We shall assume that the strains are small and that the yield stress can be considered constant.

Then

$$a = -2 k \frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1}, \quad b = \frac{4 k}{y_2 - y_1};$$

whence

$$P = 4 k (d - y_N) . \tag{11}$$

The limits of the elastic range are fixed by

$$\frac{2k}{E} = \frac{\gamma_2 - \gamma_N}{\rho} = \frac{\gamma_2 - \gamma_N}{R + \gamma_N} \quad (12)$$

where ρ = radius of curvature of neutral axis.

Thus if the tensile load per unit width P and the die radius R are known, γ_N , γ_1 and γ_2 are known. If P is large and R small, as is usual in deep drawing,

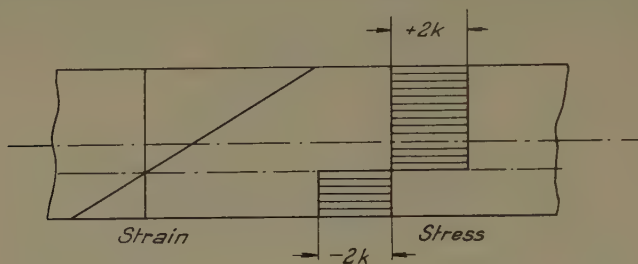


Figure 5

the elastic region becomes so small that the stress distribution is essentially as in Figure 5. Then, in plane plastic strain

$$\delta e_r + \delta e_y = 0 \quad [\text{equation (9)}]$$

and

$$\delta e = \text{thickness strain} = -\frac{2d - \gamma_N}{\rho} = -\frac{4kd + P}{4kd + 4kR - P}$$

on the tension side, and

$$= +\frac{\gamma_N}{\rho} = \frac{4kd - P}{4kd + 4kR - P}$$

in the compression side, that is, a total thinning of

$$\frac{4kd}{4kd + 4kR - P} \quad (13)$$

Plane Strain and the Slip-Line Field Theory

By far the most frequent and important applications of plasticity theory involve relatively large plastic strains, and in this case the elastic strains are negligible both in magnitude and in their influence on the stress and strain patterns.

So far, few general problems have been solved, even approximately, but for plane strain problems the theory of the slip-line field allows many cases to be solved. Plane strain conditions hold in many metal working processes: sheet, strip, and wide bar rolling; bar drawing where the width is large compared to the

depth; and certain aspects of deep drawing—to quote a few examples. In all these cases, the plastic strains are large. A rigid plastic material is assumed and the Lévy-Mises equations are therefore used. Otherwise, in plane strain the most complete solution of plastic flow problems have been realized.

The conditions are:—

- (1) Flow everywhere parallel to a given plane.
- (2) Motion independent of co-ordinate perpendicular to the given plane.

Using co-ordinates x and y , these conditions mean that we have five unknown quantities.

Stresses p_{xx} , p_{yy} , p_{xy} . Displacements u_x , v_y , and there are five equations:—
Equilibrium Equations (2)

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

Criterion of yield (1)

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4 p_{xy}^2 = 4 k^2. \quad (16)$$

Constant volume (1)

$$\delta e_{xx} = -\delta e_{yy} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (17)$$

Lévy-Mises equations (1)

$$\frac{2 p'_{xy}}{p_{xx} - p_{yy}} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{2 \frac{\partial u_x}{\partial x}}. \quad (18)$$

It is possible to go into considerable detail with these equations, to derive various theorems and conditions which must apply. These have been dealt with exhaustively by HILL [20] and by PRAGER and HODGE [21]. There are sometimes enough boundary conditions in the stresses to solve the problem without reference to the displacements. These are called 'statically determined' problems, but there are not many of them. Usually the stress and displacement equations have to be worked together. Certain conditions about the stresses are deducible, however. Thus the stress normal to the plastic-rigid interface and the shearing stress on the interface must be continuous for equilibrium across the interface. Because the yield criterion is satisfied on both sides of the boundary (the rigid side is just on the point of yield) the direct stress in the tangential direction may or may not be continuous. This follows from the quadratic form of the yield criterion.

Thus, if p_{xx} is the stress normal to the rigid-plastic boundary and the yield stress k is known, then:

$$(p_{zz} - p_{yy}) = \pm 2\sqrt{k^2 - p_{xy}^2}, \quad \text{i.e.} \quad p_{yy} = p_{xx} \pm 2\sqrt{k^2 - p_{xy}^2}.$$

In the limit, two values of p_{yy} differing by $\pm 2k$ can exist on either side of the boundary, when p_{yy} becomes either the greatest or smallest principal stress p_1 or p_2 (Figure 6). The interpretation is to be seen in the example of plastic bending under tension already discussed, where it was shown that, when the radius of curvature is small compared with the thickness of the mate-

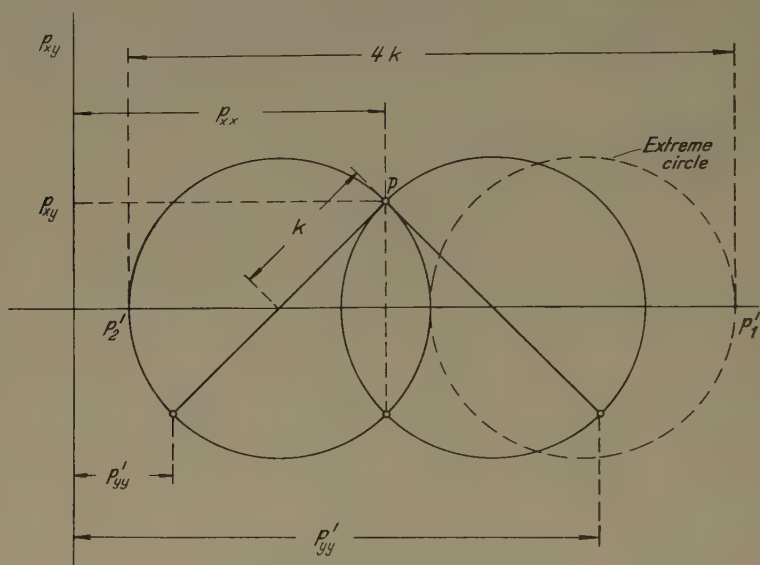


Figure 6

rial, the elastic region reduces to an imperceptibly narrow layer between two plastic regions, one side being tension, the other compression. PRAGER calls this 'the last vestige of an elastic region', and since we are neglecting the elastic stresses, we can, in the extreme case, have a discontinuity of $4k$.

The diagram Figure 6 gives a clue to the representation of the plastic condition at any point in plane strain.

The yield criterion is

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2 = 4k^2$$

and this is the equation of the Mohr circle, radius k , centre at distance $(p_{xx} + p_{yy})/2$ from the origin. The points *I* and *II* then represent the yield condition and if we choose our element so that its sides are in the directions *I* and *II*, then the element corresponds to the directions of maximum shear stress, the normal stress being the hydrostatic stress (Figure 7). The sides are therefore lines of shear (slip lines) and all elements oriented in this way represent shear elements with no extension of their sides, which are of course orthogonal.

Velocity Components

When dealing with slip-line fields, it is more convenient to consider velocity components, that is, the displacements u_x and v_y are to be considered as the displacements in unit time, corresponding to the steady displacement of the boundary in the same time interval. Since none of our quantities are time-dependent (see assumptions page 2) the time rate of strain need not be considered as influencing the results.

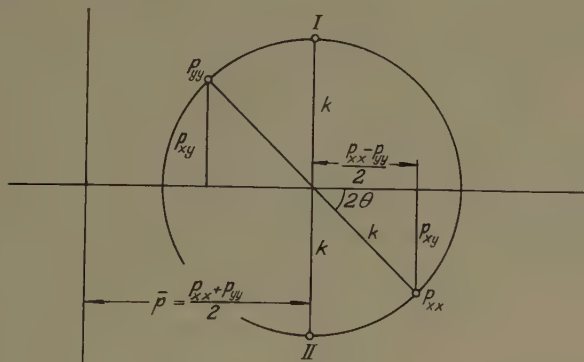


Figure 7

Similar arguments can be applied to the velocity components for continuity as to the stresses, but HILL has dealt with this matter in detail. It is only necessary to point out that the directions of maximum shear rate coincide with the directions of maximum shear stress. Such boundaries (and they form the slip lines of our plastic field) may represent discontinuities in the deformation pattern, just as they may in the tangential stress component.

Curvilinear Co-Ordinates

In plane strain, therefore, the slip lines will form a set of orthogonal curvilinear co-ordinates throughout the plastic mass and the solution of any problem is the determination of the equations for a curvilinear element. The equations of equilibrium require restating in terms of these co-ordinates rather than the Cartesian co-ordinates of equations (14) and (15).

For a very small element the equations of equilibrium become

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \pm 2k = 0 \quad (19)$$

and on integration give

$$\bar{p} + 2k\theta = \text{constant along a first shear line,} \quad (20)$$

$$\bar{p} - 2k\theta = \text{constant along a second shear line} \quad (21)$$

where θ is the angle made by the shear line to some reference direction (HENCKY [22]).

The value of the constant is generally different from one slip line to the next, but along any slip line, if we move through an angle $\delta\theta$ then

$$\bar{p} + 2k\theta = \text{const}, \quad \bar{p}' + 2k(\theta + \delta\theta) = \text{const}$$

whence

$$\bar{p}' = \bar{p} - 2k\delta\theta,$$

or, on the second slip line,

$$\bar{p}' = \bar{p} + 2k\delta\theta.$$

Velocity Relations

Considerations of continuity and the conversion of the Cartesian components of velocity to curvilinear co-ordinates leads to the Geiringer equations.

$$du + v d\theta = 0, \quad (22)$$

$$dv - u d\theta = 0 \quad (23)$$

where u and v are the velocities in the slip-line directions.

General Theorems and Characteristics of Slip-Line Fields

PRAGER and HODGE [21] have described many of the special properties of slip-line fields and it is unnecessary to go over the ground here. Use may be made of any special characteristics which can be discerned when solving particular problems, but reference must be made to a graphical method which PRAGER¹⁾ [43] has lately put forward for solving problems and which greatly simplifies the work. In this method the stress plane, physical plane (slip-line field), and velocity plane are constructed together. A few examples will illustrate this.

Example 1—Extrusion of a flat sheet (Reduction ratio 3:1)

The slip-line field is shown in Figure 8 (see PRAGER and HODGE, page 182) for a half section through the die (the other half is of course a mirror image). The die is taken as perfectly smooth, so that there is no friction at the die wall and the slip lines meet it at 45° . Material to the left of the limiting slip line 1 to 8 moves at uniform speed u_x that beyond the line 1 to 0 moves at uniform speed

¹⁾ Originally presented in Sweden, 1952 [43], but first given in detail by PRAGER at the Summer School on Plasticity at Imperial College, England, July 1953. The author wishes to pay a personal tribute to the considerable influence which PRAGER has exercised in every phase of Plasticity.

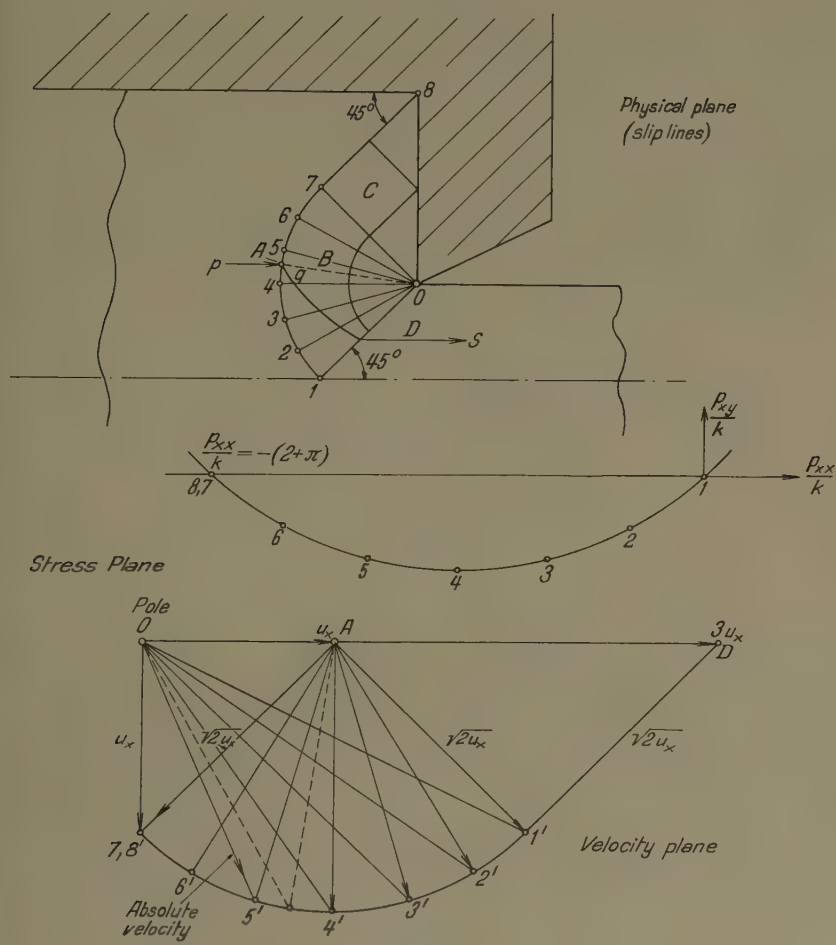


Figure 8

$3 u_x$ to the right because the reduction ratio is 3:1. At both slip lines there is a discontinuity, and considering any element A arriving at velocity u_x at the entry to the plastic zone, there is a velocity discontinuity as it crosses the line. The Geiringer equation (22) gives

$$\delta v - u \delta \theta = 0 .$$

Relative to the point A on the left of the slip line, the element has velocity components u in the normal direction and v in the tangential. From continuity considerations, u' on the right of the line must equal u (Figure 9), i.e.

$$\delta v = u \delta \theta , \quad \delta v' = u' \delta \theta = u \delta \theta .$$

Therefore, as we move along the slip line through any angle $\delta\theta$

$$\delta v = \delta v'$$

i.e.

$$\begin{aligned} v - v' &= \text{a constant along a slip line,} \\ &= \text{the discontinuity at the slip line.} \end{aligned}$$

If we can find the velocity discontinuity at any point, then we know it all along the slip line. Referring to Figure 8, at point 8 an element arrives at velo-

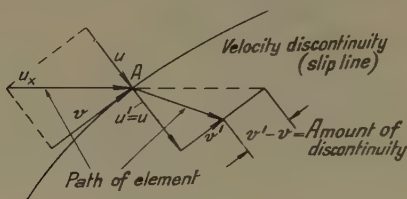


Figure 9

city u_x and must turn sharply through a right angle: it must move downwards at the same velocity (constancy of volume) because the velocity in the x -direction is zero the moment it passes across the limiting slip line, because of the die wall. We start to construct the velocity diagram. From pole point O , length $OA = u_x$ the velocity of approach, length O to $7'$, $8'$ is the vertical velocity of any point on the right of the slip line 7 to 8 and the length A to $7'$, $8'$ equal to $\sqrt{2} u_x$ is the discontinuity along the slip line. Within the triangle C , the material moves down uniformly as a rigid zone until the line BC is reached. The region B is a centred fan, with a discontinuity of value $\sqrt{2} u_x$ all along the arc AB . Any element, 5 say, has velocity u_x horizontally, $\sqrt{2} u_x$ tangentially to the limiting slip line, and the arc points 1 to 7 are represented on the arc $1'$ to $7'$ on the velocity plane. At 1 , or at any point along the limiting line BD , there is a further discontinuity, and to complete the velocity diagram so that we reach point D , the discontinuity at the line is $\sqrt{2} u_x$.

Streamlines

The absolute velocity of any point is represented by the vector joining the point to the pole; e.g. a point immediately to the right of the limiting slip line at 5 has velocity O to $5'$. The streamline from A can then be drawn in, by drawing short chords parallel to the absolute velocity at each successive point. The streamline p, q, s is shown.

Example 2—Compression between smooth platens

If a slab of an ideal rigid-plastic material is compressed between smooth, rigid platens (Figure 10a) and the width of the tool, b , is equal to the slab thickness t , then the slip-line field is a simple criss-cross of shear, all deformation being concentrated on the two 45° lines of discontinuity, and if k is the shear yield stress in plane strain, then it can easily be shown that the mean pressure on the

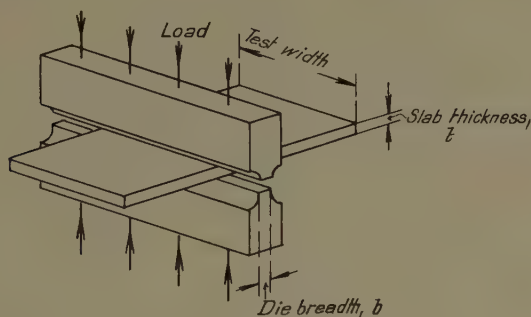


Figure 10a. Solution for $t \simeq 0.7b$.

die p_0 is $2k$. As the thickness t becomes progressively greater, so the slip-line field changes until the slab is so thick that the field from the top die no longer influences that of the bottom one, and it can be shown [23] that the mean die pressure in the limiting case is

$$p_0 = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 2.571 \times 2k. \quad (24)$$

This limit is reached according to HILL when $t/b > 8.74$.

If we start again at $t/b = 1$ and imagine the dies to approach each other steadily, the slip-line field will again go through a gradually changing pattern until we reach a ratio $t/b = 1/2$. Here the slip-line pattern becomes a double criss-cross of 45° lines, and this pattern will be repeated at $t/b = 1/3, 1/4$, etc.

GREEN [24] has examined the slip-line fields for a number of points between $t/b = 1$ and $t/b = 1/2$, and from the stress plane the mean pressure p_0 on the die can be calculated. Figures 10b-d shows the physical (slip-line) plane, the stress plane, and the velocity plane for the case where $t/b \cong 1/\sqrt{2}$.

Having calculated a number of such cases, GREEN showed that, as the dies progressively approach, from condition $t = b$ to $t = b/2$, the mean pressure rises to a maximum at $t = (1/\sqrt{2})b$ some 4 per cent higher than the yield stress $2k$ in plane compression, falling again to $2k$ as it reaches $t = b$ (Figure 11).

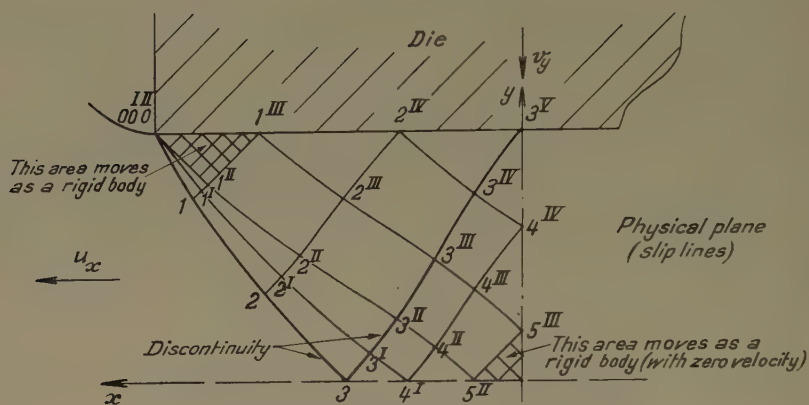
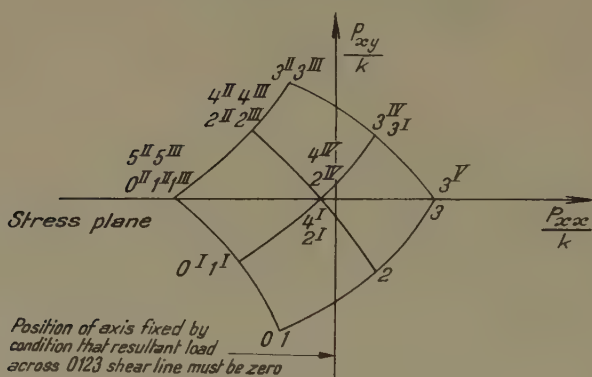
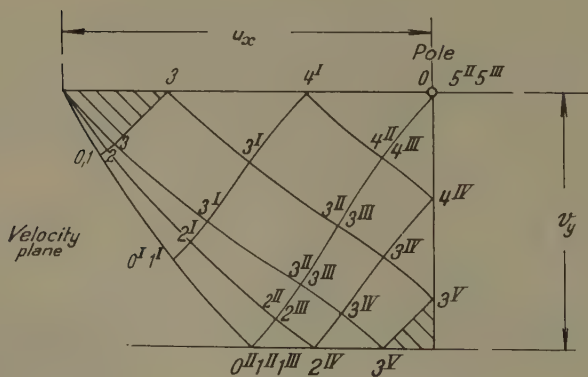
Figure 10b. Solution for $t \approx 0.7 b$.Figure 10c. Solution for $t \approx 0.7 b$.

Figure 10d.

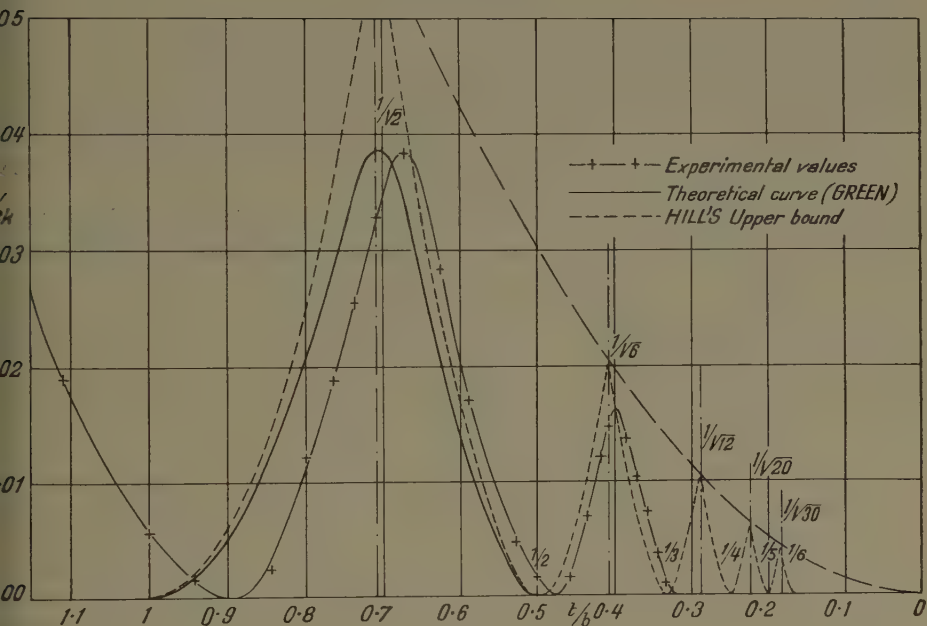


Figure 11

Experimental Investigation of Slip-Line Field Solutions

It may be asked, how far do we know from experimental measurements that these slip-line field results are correct?

There are hardly any experiments which are conclusive because most investigators have used small deformations and have tried to observe the first yielding of material, which is so much dependent upon the elastic behaviour and the transition from the elastic to the plastic region.

However, for several years the author has been working on plane plastic compression, using highly polished and lubricated dies having a width which does not overlap the material (Figure 10a). The unconfined material on each side of the dies acts as a very rigid lateral restraint on the material between the dies and even for quite narrow strip, the condition corresponds remarkably closely to plane strain [25].

This test can be made to give conditions remarkably close to those of the theory and indeed, while GREEN was working on the theoretical problem described above, experiments were being carried out at Imperial College quite independently over the same range of geometrical conditions. If a technological material is to behave as an ideal one, then certain characteristics must be aimed at: —

(1) There must be no anisotropy.

If we use cold rolled high conductivity copper, the strain has taken place in the same sense that the further strain is to occur in plane compression and the anisotropy is of little importance. Tests have shown that the material has rotational isotropy in the vertical plane.

(2) The material must have a sharp yield point.

If we suppose the material cold-worked to point F (Figure 12) and then tested, say in plane compression, a curve $FDBE$ would be obtained. There are

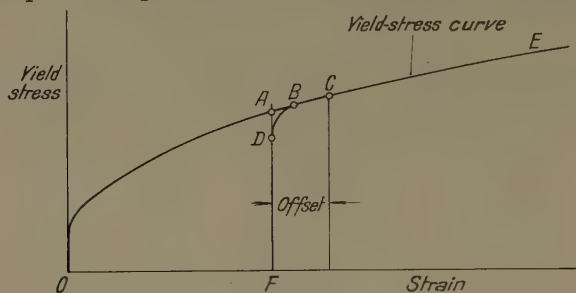


Figure 12

several points which might be used to give a value of the first plastic yield: D is the point where plastic deformation of at least part of the material has first started. B is the point where the curve from F becomes concurrent with the 'yield-stress curve', that is, the curve that is the envelope of all stress-strain curves such as F . It is difficult to determine either of these points and neither can be truly called the yield stress at the point F . A proof stress c is hardly appropriate in plasticity problems.

The best method of determining p_0 is to extrapolate the curve EB to A . A is the point on the 'yield stress curve' corresponding to zero deformation. It is a clearly defined point and has the advantage of corresponding to the theoretical condition of no deformation, eliminating the elastic strains.

(3) There should be no work-hardening.

If high conductivity copper is work-hardened by cold rolling, the yield-stress curve beyond about 30 per cent reduction in thickness, becomes nearly straight and shows little work-hardening. If we can extrapolate to zero deformation each time, the work-hardening is less important, but if we attempt to measure p_0 the mean pressure, using one pair of dies of width b , then t must vary and each stress state will be super-imposed on the previous one, and the effects of flow cannot be separated from those of yield, because in effect we are moving the point F up the yield-stress curve. In these experiments b was changed and t held constant, so that the yield stress of the material remained constant for all the tests, and the dies were simply moved to a new point on the same strip for each die width.

(4) There must be no friction.

This condition cannot be exactly met, but this requirement and requirement (2) were very closely approximated by an incremental loading method, which allowed the extrapolation to be made.

The extrapolation was carried out in the following way:—

The strip and dies were measured by micrometer, a pencil line across the strip being used to indicate the position at which the indentation was to be made. The strip was then lubricated at this point by the application of a soft graphite pencil, with a touch of mineral oil, over the whole area. This method of lubrication has been found to give more successful results than pure graphite flakes and has the advantage of being very convenient and simple. After lubrication, the strip was inserted between the dies with the edges at right angles to the width of the dies and centrally placed with respect to the loading axis. Load was then applied to the subpress until it reached a value necessary to produce a small deformation. At this value the load was held steady for 15 to 30 s, then released and the strip removed from the subpress, the mean thickness of the strip at the indentation being then measured. The strip was lubricated again, replaced carefully between the dies to register in the indentation already made, and a slightly greater load was applied. This 'incremental' loading process was repeated several times, in the same indentation, until enough of the curve had been plotted to allow the extrapolation to be made. The load increments chosen in the tests were large enough only to ensure that the load-compression or 'yield stress' curve BE was reached each time.

This 'incremental' loading method overcomes the difficulty of measuring the strip thickness, because the strip is removed between load increments. Another advantage of the method using one indentation is that the strip can be lubricated between each increment and, since these increments of compression are small, the friction cannot develop its full effect and is kept at a very low value indeed. The conditions, therefore, come very close to those specified in theory.

If we plot $\dot{p}_0/2k$ against the t/b ratio, Figure 11 is obtained, where GREEN'S theoretical result is compared with the experimental. The agreement is remarkably close. The experiments extended to $t/b = 1/3$, and GREEN has calculated the upper and lower bounds [26] of the slip-line fields and our results over the next cycle also fit nicely.

In the range where $t/b > 1$ —that is, in the range where HILL and others have similarly calculated the fields—the agreement is equally good (Figure 13).

The Rolling of Metals¹

The problem that all theories of rolling aim to solve is this:—given that it is desired to reduce the thickness of a piece of material by a certain amount,

¹ In the following sections, compressive stresses are reckoned positive.

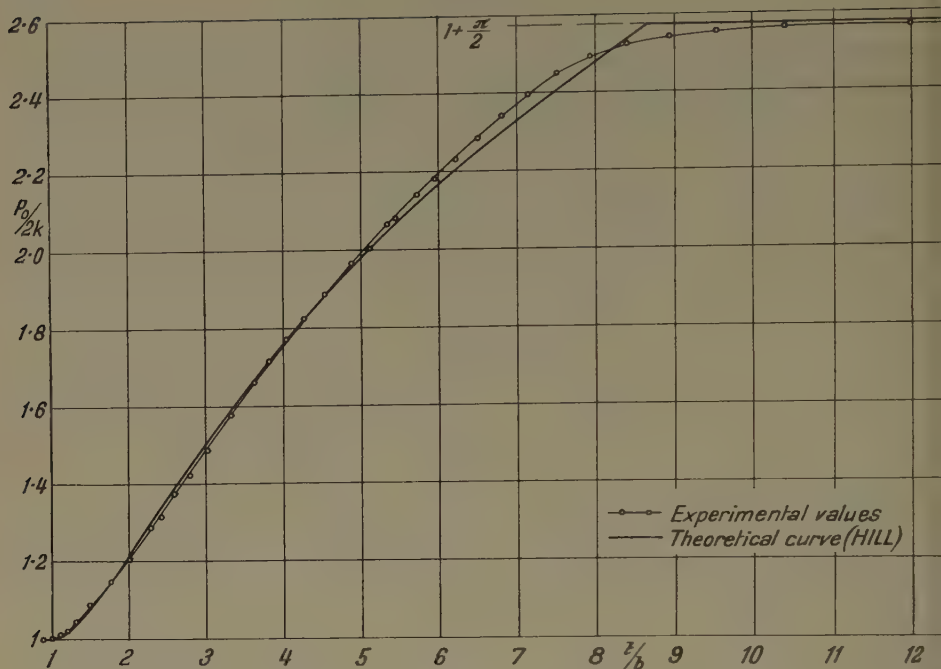


Figure 13

Curves showing the variation of $p_0 / 2k$ with t/b ($t/b > 1$).

what is the nature of the deformation and what roll force and torque need to be applied to the rolls? The information needed to solve this problem is: the initial and final thickness of the strip, the yield-stress curve of the material, the radius and elasticity of the roll, the coefficient of friction, and any externally applied forces such as strip tensions.

In the theory of plasticity, the assumption is made that the material's resistance to deformation is independent of the rate of strain. This is the condition during cold working, that is, where the material does not recrystallize faster than it is deformed. In hot working, however, the yield stress of many materials is dependent on rate of deformation and another factor enters.

Consideration will, therefore, be confined to cold rolling, in which the yield stress only depends upon the amount of strain, and to strip or sheet rolling, where the width is enough to ensure plane strain conditions. The problem in some respects is very much the same as that of plane compression between parallel dies, but the ratio of thickness to die breadth is much smaller and the dies are slightly inclined to each other. The theory of the slip-line field for inclined dies has been evaluated but it has not been applied to the case of rolling because:

- (1) The curvature of the dies will have an unknown influence.
- (2) Although in cold rolling the coefficient of friction between roll and strip is small, it has a great influence on the process: indeed the process is not possible without it.

An attempt was made by OROWAN [27] to reach a more accurate solution of hot and cold rolling, but for cold rolling, the assumptions made by VON KÁRMÁN [28] are adequate, although the latter's solution is not satisfactory for hot rolling.

When strip is rolled between smooth, lubricated rolls, the strip is in equilibrium under the effect of any external tensions, the roll torque being such as to cause the vertical reduction in thickness. The reduction in height causes a

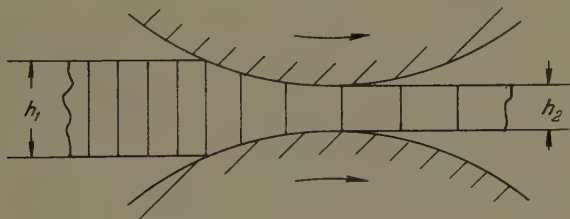


Figure 14

corresponding elongation, so that the speed of the strip leaving the rolls is greater than that entering them. A balance is set up, the rolls rotating at a speed which is less than that of the strip leaving and greater than that of the strip entering. So there is relative movement between the strip and roll surface, and since there are high radial pressures causing the deformation, there are frictional forces developed, and these act in opposite directions, depending upon whether we are on the entry or exit sides. At some intermediate point, the 'neutral point', the roll and strip must have the same surface speed and the direction of the tangential force changes over. This means that the radial force must be increasing as we move inwards from entry to the neutral point and likewise from exit giving a roof type pressure distribution. This is called the 'friction hill'. The horizontal component of the frictional forces and of the outward component of the normal force must just balance the resultant external tension force.

VON KÁRMÁN made one main assumption:

Plane vertical sections remain plane, i.e. there is slipping friction throughout the contact arc and the vertical and horizontal stresses are principal stresses.

There were also two approximations:

- (a) The vertical component of the roll pressure, q , can be taken as approximately equal to the roll pressure S .
- (b) The arc of contact is circular.

These conditions are illustrated in Figure 14. The vertical AB remains straight and vertical as it passes through the roll gap, and any friction there is

i.e.

$$\frac{d(h \rho)}{d\varphi} = 2 R' S (\sin \varphi \pm \mu \cos \varphi). \quad (25)$$

This is VON KÁRMÁN's equation.

By the Mises criterion

$$s - p = 2k \quad (\text{assumption 2})$$

where $2k$ is the yield stress in plane strain = (yield stress in simple tension) $\times 2/\sqrt{3}$.

Solutions of von Kármán's Equation

All the argument about rolling theory really reduces to solving equation (25) and the differences are in the approximations or further assumptions made. Many solutions so mutilate this equation that they are no more than empirical results without any real scientific basis.

OROWAN [29], without approximation (a) showed that a stepwise numerical solution was possible, allowing for k varying through the roll gap and was the first to give the correct solution of the equation (called the homogeneous graphical method). It is, however, rather laborious in use and it can be shown that certain further approximations can be made which simplify calculations, yet do not sensibly reduce the accuracy of the results [30].

We make the usual assumption that the coefficient of friction, μ , is constant over the arc of contact.

For angles less than 5°

$$\sin \varphi \cong \varphi, \quad \cos \varphi \cong 1,$$

except where $(1 - \cos \varphi)$ occurs multiplied by a large factor when

$$1 - \cos \varphi \cong \frac{\varphi^2}{2}.$$

For example

$$h = h_2 + 2 R' (1 - \cos \varphi) = h_2 + R' \varphi^2.$$

The roll gap is divided into three zones (Figure 16):

- (1) Elastic compression at entry.
- (2) Plastic compression.
- (3) Elastic recovery at exit.

We shall first ignore (1) and (3)

The geometry of the roll gap then becomes:
length of contact are

$$L = R' (h_1 - h_2), \quad (26)$$

angle of contact

$$\varphi_1 = \frac{h_1 - h_2}{R'}. \quad (27)$$

Then from the differential equation (25), i.e.

$$\frac{d(hk)}{d\varphi} \left(\frac{s}{k} - 1 \right) + hk \frac{d}{d\varphi} (S) = 2 R' s (\varphi \pm \mu). \quad (28)$$

The boundary conditions are given by the front and back tensions. At entry

$$\varphi = \varphi_1, \quad h = h_1, \quad s_1 - (-t_1) = k_1, \quad s_1 = k_1 - t_1 \quad (\text{total tension} = h_1 t_1).$$

At exit

$$\varphi = 0, \quad h = h_2, \quad s_2 = k_2 - t_2 \quad (\text{total tension} = h_2 t_2).$$

The solution builds up from each end and the curves meet at the neutral point φ_N .

Consider first the case of no tensions.

We assume that the product hk does not change very rapidly: for most metals this is so; i.e.

$$\frac{k(hk)}{d\varphi} \ll hk \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S}{k} \right). \quad (29)$$

Therefore,

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S}{k} \right)}{S/k} = \frac{2 R' (\varphi \pm \mu)}{h_2 + R' \varphi^2}.$$

On integration, therefore,

$$S = C^{\pm} \frac{hk}{R'} e^{\pm \mu H} \quad (30)$$

where

$$H = 2 \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{R'}{h_2}} \varphi \right). \quad (31)$$

At exit

$$S_2 = k_2, \quad \text{at entry} \quad S_1 = k_1. \quad (32)$$

On exit side

$$S^+ = \frac{k h}{h_2} e^{\mu H} \quad (33)$$

$$S^- = \frac{k h}{h_1} e^{\mu(H_1 - H)} \quad (34)$$

where $H_1 =$ value of H at $\varphi = \varphi_1$.

The above approximation (29) does not hold good with annealed strip and high back tension. But the equation can easily be modified for the case where tensions are applied to the strip [31]. We imagine two passes, one in which no tension is applied and another identical with the first but with applied tension t_1 and t_2 .

Call the roll pressure S_0 in the no-tension case, then from the differential equation

$$\frac{dS_0}{d\varphi} \pm 2 \mu R' S_0 - h \frac{dk}{d\varphi} - 2 R' k \varphi = 0$$

and for the other case

$$h \frac{dS}{d\varphi} \pm 2\mu R' S - h \frac{dk}{d\varphi} - 2R' k \varphi = 0$$

subtract and integrate

$$h \frac{d}{d\varphi} (S_0 - S) = 2\mu R' (S_0 - S) = 0$$

or

$$S_0 - S \equiv B^{\pm} e^{\pm \mu H}. \quad (35)$$

At entry

$$(S_0 - S)_1 = \{k_1 - (k_1 - t_1)\} = t_1 e^{-\mu(H_1 - H)} = 1.$$

At exit

$$(S_0 - S)_2 = \{k_2 - (k_2 - t_2)\} = t_2 e^{+\mu H_2} = 1.$$

Inserting in (35) we get B^{\pm} and therefore

$$S^+ = \left(\frac{k}{h_2} - t_2 \right) e^{\mu H}, \quad (36)$$

$$S^- = \left(\frac{k}{h_1} - t_1 \right) e^{\mu(H_1 - H)}. \quad (37)$$

These equations are satisfactory over the whole range of tensions and pass reductions.

Total Roll Force

For the total roll force, we integrate the area under the curve of S .
The roll force per unit width P is

$$P = \int_0^{\varphi_1} S R' d\varphi = R' \int_0^{\varphi_1} s d\varphi. \quad (38)$$

This must be done numerically by SIMPSON's rule or other area formula, because S depends on k , which varies with degree of reduction.

Roll Flattening

The force P acting on a small area of the roll surface causes a flattening of the roll.

HITCHCOCK [32] proposed that if the roll pressure distribution could be considered as approximately elliptical—and this is not far wrong—then it can be shown from the Hertzian theory of contact that the radius of curvature of the

deformed roll is constant over the arc and equal to

$$R' = R \left(1 + \frac{c}{\delta} \frac{P}{P} \right) \quad (39)$$

where R = roll radius,

P = roll force per unit width,

c = a constant = 3.34×10^{-4} for steel rolls, but depends upon the elastic properties of roll material,

δ = the pass reduction = $(h_1 - h_2)$.

Roll Torque

OROWAN [29] showed that the torque per roll, per unit width

$$G = R R' \left(\int_{\varphi_n}^{\varphi_1} S^- d\varphi - \int_0^{\varphi_n} S^+ d\varphi \right). \quad (40)$$

This relation is the difference of two nearly equal amounts, and with an approximate method of solution, is not accurate. It was shown [30] that an expression insensitive to slight inaccuracies in calculating the pressure distribution could be derived from the equilibrium of the horizontal forces:

$$(t_1 h_1 - t_2 h_2) - 2 \int_{\varphi_n}^{\varphi_1} \mu S^- R' d\varphi + 2 \int_0^{\varphi_n} \mu S^+ R' d\varphi + 2 \int_0^{\varphi_1} S \varphi R' d\varphi = 0$$

whence, using (4), therefore

$$G = R R' \int_0^{\varphi_1} S \varphi d\varphi + \frac{R}{2} (t_1 h_1 - t_2 h_2). \quad (41)$$

The Elastic Arcs of Contact

Although it was realized at an early date in the development of rolling theories that the roll deformed elastically, no allowance was made for the effect of the elastic strains in the strip. For large passes on fairly thick strip the elastic arcs are comparatively small and the error is unimportant.

For medium and small passes the elastic recovery at *exit* has a sizeable influence and in very small passes—4 per cent reduction or even less—even the elastic compression at *entry* may be significant.

The total roll force

$$P = P_p + P_{e1} + P_{e2}. \quad (42)$$

Considering only the elastic recovery zone (Figure 16), (i.e. $P = P_p + P_{e2}$) at the end of the plastic zone and beginning of the elastic zone the tension is t_{e2} and the minimum height h_m . At true exit t_2 and h_2 respectively. We take as a first approximation that the elastic recovery zone is rectangular, of height h_2

and length a . Since the coefficient of friction is usually not much greater than 0.06 in commercial cold rolling, the frictional force over the surface of the elastic arc is small and we neglect it.

We do not, however, neglect the effect of the frictional force in calculating the effective strip tension t_{e2} acting on the plastic zone neither do we ignore it when calculating the roll torque.

Using these assumptions and approximations it is possible to calculate the overall elastic contribution to the roll force in terms of the known displacement of the strip surface in the elastic region [33]. The length of the elastic recovery arc, a , is given by:

$$a = \sqrt{\frac{h_2 R'}{E} (1 - \nu^2) (k_2 - t_2)}$$

and the contribution to the roll force P_{e2}

$$P_{e2} = (\text{a constant}) \times \sqrt{h_2 R'} (k_2 - t_{e2})^{3/2} \quad (43)$$

where E = elastic modulus for the strip and ν is POISSON'S ratio.

In terms of the externally applied tension t_2

$$t_2 = t_{e2} + \frac{2 \mu P_{e2}}{h_2} \quad (44)$$

The roll torque is modified by the amount

$$G_{e2} = -\mu R P_{e2}.$$

The radius of the flattened arc of contact, R' , is slightly modified [33]

$$R' = R \left\{ 1 + \frac{CP}{(\sqrt{\delta} + \delta_2 + \delta_t + \sqrt{\delta_2})^2} \right\},$$

$$\delta = h_1 - h_2,$$

$$\delta_2 = h_e - h_m = \frac{h_2 (1 - \nu^2)}{E} (k_2 - t_{e2})$$

(h_e = thickness with tension still applied),

$$\delta_t = \frac{\nu (1 + \nu)}{E} (h_2 t_2 - h_1 t_1) = \text{recovery at exit when tension removed.}$$

Approximate Methods of Calculating Roll Force and Torque

There are so many calculating methods available that the engineer may very well feel uncertain as to whether one method is better than another but there are several questions which may be asked in deciding on a reliable method to use.

For general use, the real basis is to use only the yield-stress curve of the material to be rolled and the coefficient of friction between the roll and material.

The solution of VON KARMAN's equation already described allows for the variation of the yield stress through the roll gap, and necessarily involves fairly lengthy calculations. A simplification for practical calculations would be possible with a constant yield stress because equations (36) and (37) are such that the neutral point can be predicted and the shape of the pressure distribution depends only upon the shape of the yield-stress curve.

The early theories of rolling all assumed a constant yield stress. That the predicted results were so much at variance with each other and with the miscellaneous experimental results then available is not surprising, especially as these early theories were developed for hot rolling, where the assumptions made do not hold.

The first requirement for a practical calculation method is to make equations (36) to (41) independent of k . For the case of rolling without tension, COOK and LARKE [34] showed that the simple Ekelund formula

$$P = k \sqrt{R'} \delta \left(1 + \frac{1.6 \mu \sqrt{R'} \delta - 1.2 \delta}{h_1 + h_2} \right) \quad (45)$$

gave results in satisfactory agreement with OROWAN's theory, except for a constant varying from about 0.98 to 1.09 depending upon the material.

If we plot per cent reduction against position in the roll gap, it will be found that most of the deformation has occurred in the first 40 per cent of the contact length, so the *average* yield stress is not the mean effective. COOK and LARKE's correcting factor was found [35] to be unnecessary if the true mean yield stress was taken

$$\bar{k} = \frac{\int_0^{\varphi_1} k \, d\varphi}{\int_0^{\varphi_1} d\varphi} = \frac{\int_0^{\varphi_1} k \, d\varphi}{\varphi_1} \quad (46)$$

This 'bunching' of the deformation at the entry side makes it possible to use a mean yield stress, without much loss of accuracy.

With a constant mean yield stress equations (38) and (41) can be numerically integrated once and for all over the practical range of cold rolling conditions [36] and graphically presented as a roll force function in terms of three non-dimensional quantities:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \quad (\text{geometrical factor}), \\ b &= \frac{\bar{k} - t_2}{\bar{k} - t_1} \quad (\text{tension factor}), \\ r &= \frac{h_1 - h_2}{h_1} \quad (\text{reduction factor}). \end{aligned}$$

The roll force per unit width is then:

$$P_x = (\bar{k} - t_1) \sqrt{R' \delta} \times p(a, b, r) \quad (47)$$

$p(a, b, r)$ being the roll force function.

A similar function for torque can be obtained from equation (41)

$$G = R \delta (\bar{k} - t) \times g(a, r, b).$$

Although a double interpolation is necessary, this can be done quite quickly in practice and a further refinement is to allow for the roll force and torque resulting from the elastic recovery [36]. The method is simple, but necessitates a trial and error calculation since the elastic arc causes a compressive force on the end of the plastic zone and this must be subtracted from the external tension.

Comparison with Experimental Results

Many thousands of separate rolling tests were made on the Sheffield Experimental Mill, using various pass reductions from 2 per cent up to 95 per cent in a single pass, with various types of materials, various lubricants, strip thickness, roll speed, and strip tensions. One of the most difficult factors to control is the friction in the pass, because most lubricants are very sensitive to small temperature changes and the roll force and torque change continuously during a pass on a long coil of strip [37]. It is of course particularly difficult to control when tensions are applied because tension variations cause the work done in the roll gap to change. The question arises—how accurately do our calculation methods and theories predict these results?

Two things influence the answer to this question. First, the effectiveness of the underlying theory in predicting the results (obviously our calculation method can be no better than the theory on which it is based) and second, the means we have for independently measuring yield stress and friction coefficient. If we accept that the yield-stress curve can be determined, then our only adjustable parameter is the coefficient of friction. We now have a little evidence about the friction likely to exist in cold rolling and it is possible, therefore, to test the calculation method against the experimental results [36].

About 150 separate passes made in the Sheffield Mill over a wide range of pass reductions and tensions were calculated using the method outlined above. Assuming the measured results to be correct, the percentage errors in the calculated roll force and torque were determined and it was found that 95 per cent of the results are within ± 10 per cent of the experimental with passes varying from 4 to 74 per cent in a single pass. It is probable that the measured values may involve errors up to ± 3 per cent, so that the calculation method appears to be very satisfactory.

Roll Flattening

In all the foregoing calculations, HITCHCOCK's formula was used to calculate the roll radius. This assumes that the pressure distribution can be taken as elliptical, and while this is not a bad first approximation, it may be thought that the actual roll shape and the pressure distribution—being mutually influencing—will depart sensibly from so simple a picture.

OROWAN pointed out that the pressure distribution clearly cannot be a peaked curve as calculated. The peak would cause a depression in the roll, and he made some tests which, while not inclusive, gave support to this view [27].

This effect is only found in very thin hard strip where the flattening is very great. BLAND [38] calculated the displacements along the arc of contact so that the plastic stresses and strains in the strip were consistent with those for the elastic roll and found that the theory requires also that the roll should show such an indentation. HITCHCOCK's formula was shown to be very adequate, however, for most practical cases of cold rolling.

Yield Stress Curves

We have assumed in the foregoing that the yield stress curve is known, not only to some fundamental measure of strain but also to a basis of percentage reduction in the pass. It will be clear that the complex stress-strain distribution in the roll gap will cause a certain amount of work-hardening in excess of that represented by homogeneous compression from a height h_1 to h_2 , because there will be redundant shearing not indicated by the pass reduction.

What we have to do is to determine from a simple mechanical test the stress-strain curve of the material, for example, in simple homogeneous tension or compression and interpret this in relation to the actual deformations in rolling.

The usual stress-strain curve is found for simple homogeneous compression or tension: this can be done successfully up to extensions of about 40 per cent with ductile materials but this corresponds only to about 30 per cent reduction in thickness and is insufficient as a basis for rolling mill calculations.

The method first investigated by SACHS [39] and later developed by COOK and LARKE [40] gives a means of establishing the yield stress in compression, for thick material, but is not applicable to thin strip material. Two methods were devised for determining the yield-stress curves for the investigations referred to above [35].

One uses the plane compression test described on page 17. The roll surfaces are very nearly parallel in cold rolling, and since the theories assume homogeneous compression, the yield-stress curve in plane compression should be very close to that in cold rolling. In the test, a strip of material is compressed incrementally, lubricating each time, the successive increments giving progressive

reductions. The envelope of all the individual compressions forms the yield-stress curve, and since the friction is very small, a very near approach to the true plane compression curve is obtained. The ratio of strip thickness to die breadth should be kept within a ratio of 1:2 to 1:4 for the best results.

The second method uses the tensile test, test pieces being cut in the length direction of the strip from material progressively rolled down, say in 5 per cent passes. The true stress-true strain curve from each test is set up at the appropriate ordinate of reduction, and the envelope of all the curves drawn in as the yield stress curve of the material. The basis of this method was fully described elsewhere [35].

Coefficient of Friction in Cold Rolling

What do we know about the coefficient of friction between lubricated surfaces pressed together with high pressure, and moved relatively to each other for small distances? The evidence is contradictory at present. The values derived from rolling tests as described above depend upon the theory used, the constancy of the rolling conditions, and whether the elastic recovery of the strip is allowed for. From many hundreds of passes which he has calculated at one time or another or by one method or another, the author has come to the conclusion that, if a coefficient of friction as normally conceived exists under rolling conditions, then the value is rather lower than has usually been assumed: probably between 0.05 and 0.07 for good lubrications and adequate cooling.

For good lubricants, OROWAN and LOS [41] found:

- (a) For mild steel on hardened steel, using palm oil μ started at 0.025–0.035, rose gradually to 0.06 as the relative amount of movement increased.
- (b) For aluminium on hardened steel and slightly contaminated surfaces, μ started at about 0.08 and rose steadily with relative movements.

For the same combination, but using Shell lubricant, μ rose from 0.06 to 0.1.

The point OROWAN makes is that the linear movement is a controlling factor.

These values are roughly confirmed by rolling tests, in that steel-on-steel seems to lead to lower coefficients than non-ferrous metals-on-steel. Moreover, by taking certain limiting rolling conditions, and allowing for elastic recovery, μ is found to range from 0.05 to 0.08. The relative movement in rolling is usually small corresponding to the lowest values given by OROWAN (movements less than 1 mm), but with large diameter rolls the relative movements might be more than this. Yet so far as we know, the coefficient is the same for all geometrical similar systems, whereas such a phenomenon as described by OROWAN would involve a variable of the system.

BOWDEN and TABOR's [42] tests, using a special type of apparatus, gave coefficients for well lubricated surfaces from 0.07 to 0.10, but their test procedure, like OROWAN's, involved sliders rubbing on surfaces and the conditions

are strictly not the same as in rolling. There is much surface smearing in rolling, but little transfer of metal to the roll surface.

One method of finding the coefficient of friction in cold rolling tests, which is independent of any particular theory of rolling, is being used at Imperial College at present. It gives good, consistent results.

An increasing back tension is applied to the strip until slipping occurs, when the neutral point has moved to exit, i.e. $\varphi_n = 0$. Under this condition

$$P = R' \int_0^{\varphi_1} s \, d\varphi \quad \text{and} \quad G = \int_0^{\varphi_1} R R' \mu s \, d\varphi$$

whence $\mu = G/(R P)$. Experimentally, it is necessary to measure and record continuously the roll force and torque in a suitable mill, in which a gradually increasing back tension can be applied. It is also necessary, strictly, to measure the forward slip (i.e. the amount by which the strip speed at exit exceeds the roll speed, as a fraction of roll speed) but in practice the value of $G/(R P)$ peaks distinctly at zero forward slip so that no difficulty is experienced in observing it.

This method has now been tried out for a great number of lubricants and rolling conditions and has proved very successful. It confirms that the coefficient of friction lies between 0.04 and 0.08 for normal roll lubricants. The results are not yet published.

REFERENCES

- [1] SCHMID, E., and BOAS, W., *Plasticity of Crystals with Special Reference to Metals* (Hughes & Co., London, 1950). Translation from original German «*Kristallplastizität*».
- [2] MOTT, N. F., *The Mechanism of Work-Hardening in Metals*, Proc. Inst. Mech. Eng. **166**, 413 (1952).
- [3a] HUME-ROTHERY, W., *Structure of Metals and Alloys*, Inst. Met. Monographs No. 1 (1947), The Institute.
- [3b] COTTRELL, A. H., *Theoretical Structural Metallurgy* (Arnold & Co., London, 1948).
- [4] BISHOP, J. E. W., and HILL, R., *Plastic Properties of a Face-Centered Cubic Metal*, Phil. Mag. **42**, 414, 1298 (1951).
- [5] HILL, R., *The Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford University Press, London, 1950).
- [6] For a general discussion, see SOUTHWELL, *Theory of Elasticity*, chapters 8, 9. SECHLER, *Elasticity in Engineering*, chapters 2, 3, and 4. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, Chapter 6.
- [7] BRIDGMAN, P. W., Metals Tech. Pub. 1782 (1942); Rev. mod. Phys. **17**, 3 (1945); J. appl. Phys. **17**, 201 (1946), etc.
- [8] HENCKY, H., Z. angew. Math. Mech. **4**, 323 (1924).
- [9] HUBER, M. T., Czasopisms tech. Lemberg **22**, 81 (1904).
- [10] NADAI, A., J. appl. Phys. **8**, 205 (1937).
- [11] PRAGER, W., and HODGE, P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids* (Chapman and Hall, London, 1951; Wiley, New York).

- [12] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Chapter 2.
- [13] DE SAINT-VENANT, See *History of the Elasticity and Strength of Materials*, by TODHUNTER and PEARSON (Cambridge University Press, London, 1893), Vol. II, Part I, pp. 165 et seq.
- [14] LÉVY. See TODHUNTER and PEARSON as for DE SAINT-VENANT, for a critical review of the work of LÉVY and DE SAINT-VENANT.
- [15] VON MISES, R., Göttinger Nachr., math.-phys. Klasse 1913, 582.
- [16] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, pp. 23-33.
- [17] HOHENEMSER, K., Proc. 3rd. Int. Cong. appl. Mech., Stockholm 1930, also Z. angew. Math. Mech. 11, 15 (1931).
- [18] MORRISON, J. L. M., and SHEPHERD, W. M., Proc. Inst. Mech. Eng. 163, 1 (1950).
- [19] SWIFT, H. W., Engineering 166, 333 and 357 (1948).
- [20] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Chapter 6.
- [21] PRAGER, W., and HODGE, P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Chapters 3, 5, and 6.
- [22] HENCKY, H., Z. angew. Math. Mech. 3, 241 (1923).
- [23] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, pp. 254 et seq.
- [24] GREEN, A. P., Phil. Mag. [7] 42, 911 (1951).
- [25] WATTS, A. B., and FORD, H., Proc. Inst. Mech. Eng. [B] 1, 10 (1953).
- [26] See HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Chapter 3.
- [27] OROWAN, E., Proc. Inst. Mech. Eng. 150, 140 (1943).
- [28] KÁRMÁN, T. VON, Z. angew. Math. Mech. 5, 139 (1925).
- [29] OROWAN, E., Proc. Inst. Mech. Eng. 150, 146-159 (1945).
- [30] BLAND, D. R., and FORD, H., Proc. Inst. Mech. Eng. 159, 144 (1948).
- [31] BLAND, D. R., and SIMS, R. B., Proc. Inst. Mech. Eng. (1953, awaiting publication).
- [32] HITCHCOCK, J. H., *Roll Neck Bearings*, Appendix I. 1935 A. S. M. E. Special Report.
- [33] BLAND, D. R., and FORD, H., J. Iron Steel Inst. 171, 245 (July 1952).
- [34] COOK, M., and LARKE, E. C., J. Inst. Met. 71, 557 (1945).
- [35] FORD, H., Proc. Inst. Mech. Eng. 159, 115 (1948).
- [36] FORD, H., BLAND, D. R., and ELLIS, F., J. Iron Steel Inst. 168, 57 (1951); 171, 239 (1952).
- [37] HESSENBERG, W. C. F., and SIMS, R. B., J. Iron Steel Inst. 168, 155 (1951).
- [38] BLAND, D. R., Proc. Inst. Mech. Eng. 163, 141 (1950).
- [39] SACHS, G., Z. Metallkde. 16, 55 (1924).
- [40] COOK, M., and LARKE, E. C., J. Inst. Met. 71, 371 (1945).
- [41] OROWAN, E., and LOS, See UNDERWOOD, *The Rolling of Metals* (Chapman and Hall, London, 1950), p. 154.
- [42] BOWDEN, F. P., and TABOR, D., *The Friction and Lubrications of Solids* (Clarendon Press, Oxford, 1950).
- [43] PRAGER, W., Trans. Roy. Inst. Techn., Stockholm, 65, 1-25 (1953).

(Received: July 6, 1953.)

Hautkondensation an feingewellten Oberflächen bei Berücksichtigung der Oberflächenspannungen¹⁾

Von ROMANO GREGORIG, Zürich²⁾

1. Vorbemerkung

Es bestehen bekanntlich zwei verschiedene Arten von Kondensationen: Tropfenkondensation und Hautkondensation. Die Wärmeübergangszahlen bei Tropfenkondensation ergeben für übliche Betriebszustände Werte, die ein grosses Vielfaches derjenigen bei Hautkondensation sein können. Es ist somit klar, dass die Tropfenkondensation bevorzugt wird, die jedoch nur bei ganz besonderen Zuständen der Oberfläche, auf welcher die Kondensation stattfindet, auftritt. Diese kann mit Flüssigkeiten von geeigneter Oberflächenspannung derart behandelt werden, dass sich, wenigstens für eine kurze Zeit, Tropfenkondensation einstellt. Es ist jedoch bis heute noch kein Verfahren gefunden worden, durch welches man auf die Dauer zum Beispiel eines Jahres Tropfenkondensation garantieren könnte. Deshalb ist man vorläufig gezwungen, sämtliche Wärmeaustauschapparate, bei welchen Kondensation vorkommt, unter der Annahme von Hautkondensation zu dimensionieren.

Es ist bekannt, dass bei einem Wärmedurchgang nur der grösste Widerstand massgebend ist. Daraus folgt, dass eine Verbesserung des Wärmeüberganges auf der Kondensationsseite nur dann besonders zweckmässig ist, wenn der Widerstand der Wärmeströmung auf dieser Seite grösser ist als auf der kühlenden Fläche. Dies ist besonders bei vertikalen Vorwärmern von Dampfturbinenanlagen der Fall, wo die Wärmeübergangszahl auf der Kondensationsseite nur einen Bruchteil derjenigen auf der Warmwasserseite beträgt. Bei solchen Vorwärmern lohnt sich die Verbesserung des Wärmeüberganges auf der Kondensationsseite.

2. Wirkung einer feingewellten Oberfläche auf den Vorgang der Hautkondensation

Um den Mechanismus der laminaren Hautkondensation besser überblicken zu können, sei hier die von NUSSELT im Jahre 1916 aufgestellte und noch heute gültige Formel ins Auge gefasst.

¹⁾ Erweiterte Fassung des am 3. Mai 1952 im Rahmen der Frühjahrstagung der Schweizerischen physikalischen Gesellschaft in Baden gehaltenen Kurzreferates.

²⁾ Forschungsabteilung der Escher Wyss AG.

Definiert man:

α = Wärmeübergangszahl der Kondensation,

r = Verdampfungswärme,

γ/g = Dichte des Kondensats,

λ = Wärmeleitzahl des Kondensats,

η = dynamische Zähigkeit des Kondensats,

ϑ = mittlere Temperaturdifferenz zwischen dem kondensierenden Dampf und der diesem zugekehrten Wandseite,

H = Höhe der vertikalen ebenen Wand und

g = Erdbeschleunigung,

so ergibt sich nach der Nusseltschen Theorie:

$$\alpha = 3400 \left\{ \frac{r \lambda^3 (\gamma/g)^2}{\eta} \cdot \frac{g^2}{H \vartheta} \right\}^{1/4}. \quad (1)$$

Diese Gleichung gibt uns an, welche Grössen geändert werden müssen und in welchem Sinne dies geschehen soll, um eine Vergrösserung von α zu erreichen. Der erste Bruch in der geschweiften Klammer kann unter Beibehaltung des gleichen Dampfes nicht geändert werden, weil er nur Stoffwerte enthält. Die Temperaturdifferenz ϑ kann insofern nicht variiert werden, als sie von den Gegebenheiten des Wärmeprozesses vorgeschrieben ist. Es bleiben somit nur noch die zwei Grössen g und H , über welche man frei verfügen kann. Wenn jedoch der Abtransport des Kondensates nur unter der Wirkung der Erdanziehung stattfinden soll, so fällt auch g als Variable ausser Betracht.

Die Wärmeübergangszahl α kann nach Gleichung (1) gross gemacht werden, indem H klein gewählt wird. Wird ein vertikales Rohr mit einem Draht bestimmten Durchmessers spiralförmig umwunden, so reduziert sich die in die Gleichung einzusetzende Höhe H auf die Ganghöhe der Spirale. Man erhält eine Erhöhung der Wärmeübergangszahl annähernd proportional der vierten Wurzel des Verhältnisses zwischen der gesamten Rohrhöhe und der Ganghöhe der Drahtspirale. Konstruktive Gründe haben die Anwendung von solchen Rohren als unzweckmässig erscheinen lassen.

Ein Ersatz der Erdanziehung mit durch Rotation hervorgerufenen Trägheitskräften führt zu praktisch unmöglichen Ausführungen.

Werden in einem Kondensator (in den Rohren das Kühlmittel, aussen kondensierender Dampf) nach Figur 1 vertikale, aussen gerillte Rohre vorgesehen, so steigt die Wärmeübergangszahl an der Kondensationsseite bei geeignetem Profil der Rillen auf ein Mehrfaches gegenüber den Werten bei glatten Rohren. Der Grund liegt darin, dass die Oberflächenspannungen gewaltige Druckgradienten in der Ebene senkrecht zur Rohrachse erzeugen. In Figur 2 ist ein Rillenprofil dargestellt. In Punkt I ist infolge der Konvexität der Kondensatoroberfläche ein Überdruck in der Kondensathaut gegenüber dem Dampf-

drucke vorhanden, welcher durch die Oberflächenspannung und den Krümmungsradius der Kondensathaut ϱ_I gegeben ist. Umgekehrt ist im Punkt *II*, des Vorzeichenwechsels der Oberflächenkrümmung wegen, ein Unterdruck vorhanden. Auf diese Art entsteht ein Druckgradient in der Kondensathaut in Richtung von Berg zu Tal. Wäre keine Gravitation vorhanden, so würde sich die Oberfläche der Kondensathaut nach dem umhüllenden Kreis g einstellen. Der Unterdruck im Punkt *II* ist bei allen in der Praxis vorkommenden Fällen sehr klein gegenüber demjenigen, welcher durch die «Saughöhe» normal zur



Fig. 1

Vertikales, aussen längsgerilltes Rohr.

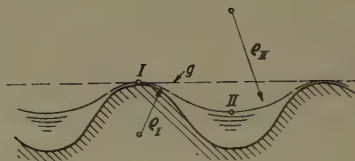


Fig. 2

Kondensatprofil an einer feingewellten Oberfläche.

Bildebene (Figur 2) hervorgerufen wird. Die Oberfläche der Kondensathaut wird somit in der Talgegend hineingesogen, und zwar in dem Masse, als das durch die Gravitation im Tal abfließende Kondensat die Höhenenergie in Reibungsenergie umwandeln kann.

Am Rillenberg ist der Druck des Kondensats infolge der Oberflächenspannung grösser als der Dampfdruck. Es muss somit eine Arbeit geleistet werden, wenn das Kondensat von der Grenze des Dampftraumes in die Kondensatschicht eindringt. Um eine Idee über die Verhältnisse zu erhalten, sei hier trockener, gesättigter Wasserdampf von 100°C und ein Krümmungsradius am Scheitel des Rillenberges von $0,6\text{ mm}$ vorausgesetzt. Damit ergibt sich ein Temperatursprung zur Aufbringung der obenerwähnten Arbeit nach den Beziehungen von Lord KELVIN und von HELMHOLTZ über das thermodynamische Gleichgewicht zwischen dem Wasserdampf und der gegenüberstehenden Wasseroberfläche von nur $1,7 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}$. Dieser kleine Temperatursprung wird in den nachfolgenden Rechnungen vernachlässigt.

Um den Vorgang der Hautkondensation an feingewellten Oberflächen besser behandeln zu können, seien die durch weiter unten entwickelte Rechnungen

bestimmten Grössen (Hautdicke h , Druck p , Kondensatgeschwindigkeit w und Wärmeübergangszahl α) an einem konkreten Beispiel erörtert (Figur 3).

Wie man sieht, erzwingt der grosse Druckgradient eine ausserordentlich dünne Kondensathaut (einige μm im Rillenscheitel). Daraus geht die Notwendig-

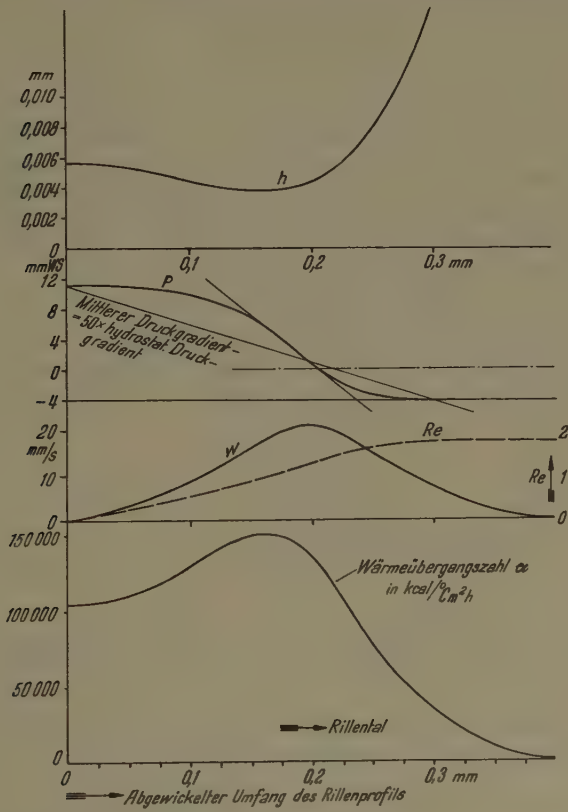


Fig. 3

Hautdicke h , Druck p , mittlere Geschwindigkeit w und Wärmeübergangszahl.

keit einer Prüfung des Einflusses der Wandrauhigkeit hervor. Er wird im Abschnitt 3.4 besprochen.

Die Wärmeübergangszahl ist, da es sich um ein reines Wärmeleitproblem handelt (Reynoldssche Zahlen von der Grössenordnung 0 bis 10), umgekehrt proportional der Dicke der Kondensathaut. Da letztere so klein ist, wird die Wärmeübergangszahl sehr gross und erreicht im Beispiel von Figur 3 mit 100000 bis 150000 $\text{kcal}/^\circ\text{C m}^2 \text{ h}$ Werte, die sogar teilweise über denjenigen liegen, welche GNAM bei Tropfenkondensation gemessen hat. Dabei ist jedoch

zu bemerken, dass bei gerillten Rohren die Kondensation sich nur auf die Gegend um den Rillenscheitel beschränkt, weil das Rillental mit der grossen Dicke des Kondensats relativ viel schlechtere Wärmeübergangszahlen aufweist. Die auf die totale Rohroberfläche bezogene mittlere Wärmeübergangszahl ist natürlich viel kleiner als die oben angegebene, jedoch noch immer ein grosses Vielfaches derjenigen bei glatten Rohren.

3. Berechnung des Wärmedurchganges

3.1. Rechnerische Bestimmung des Profils der Wellen

Ausser den schon unter 2 angeführten Grössen definieren wir noch:

h = Dicke der Kondensathaut, normal zur Wandoberfläche gemessen,

ϱ = Krümmungsradius der Oberfläche der Kondensathaut,

k = Kapillarkonstante (Kondensat gegen Dampf),

p = Druck im Kondensat, konstant über h angenommen,

w = mittlere Geschwindigkeit des Kondensats,

q = Kondensatmenge pro Längeneinheit (parallel zur Rohrachse) und

s = abgewinkelte Länge des Wellenprofils vom Scheitel aus gemessen.

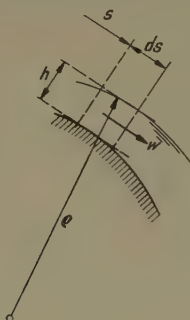


Fig. 4.

Der ausserordentlich kleinen Reynoldsschen Zahlen der Kondensatströmung wegen wird laminare Strömung vorausgesetzt. Aus dem gleichen Grunde wird die Änderung der kinetischen Energie gegenüber derjenigen der Druckenergie als unterdrückbar angesehen. Der Druckverlust ergibt sich somit auf der infinitesimalen Strecke ds zu (Figur 4)

$$dp = -3 \eta \frac{w}{h^3} ds. \quad (2)$$

Der durch die Oberflächenspannung gegebene Druck ist der Krümmung der Oberfläche proportional. Man kann somit

$$p = \frac{k}{\varrho} \quad (3)$$

einem Wellenprofil mit konstanter Dicke der Kondensathaut. Wir setzen somit:

$$h = \Phi(s) = h_0 = \text{const.}$$

Gleichung (7) wird zu

$$\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} = \frac{3}{2} \frac{\eta}{r} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\vartheta}{h} \frac{\vartheta}{h_0^4} s^2 \quad (8)$$

und ermöglicht die Berechnung des Verlaufes der Oberfläche des Kondensats mittels einer graphischen Integration. Das Wellenprofil ist hiermit auch gegeben, da ja $h = h_0 = \text{const}$ ist.

Auf die Stoffwerte wird noch in Abschnitt 3.3 eingegangen.

Ursprünglich wurde beabsichtigt, die gerillten Rohre bei den Kondensatoren der Dampfturbinenanlagen zu verwenden. Das durch graphische Integration erhaltene, in Figur 5 dargestellte Profil wurde für eine Kondensationstemperatur des Wasserdampfes von 30°C und die Werte $h_0 = 0,005$ mm, $\vartheta = 0,53^\circ\text{C}$ und $\varrho_0 = 0,6$ mm nach Gleichung (8) ermittelt. Der Bestimmung der Arbeitsweise dieses Profils bei anderen Zuständen diene, wie unten ausgeführt wird, eine Differenzenrechnung.

3.2. Berechnung des Wärmeüberganges

Werden die verschiedenen Grössen eines bekannten Zustandes für $s = s_n$ mit dem Index n und an der Stelle $s + \Delta s$ mit $n + 1$ bezeichnet, so ergeben sich gemäss den Gleichungen (2) bis (5) und Figur 6

$$\varrho_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_n} - \frac{3}{h_n^3} \frac{\eta}{\gamma} \frac{\vartheta}{h} \Delta s}, \quad (9)$$

$$\Delta q_n = \frac{\lambda}{r} \frac{\vartheta}{h_n} \Delta s, \quad (10)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_n, \quad (11)$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad (12)$$

$$\Delta \psi = \frac{\Delta s}{\varrho}, \quad (13)$$

$$h_{n+1} = h_n + \left[(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} (\Delta \varphi - \Delta \psi) \right] \Delta s, \quad (14)$$

wobei die Bedeutung des Radius R , der Winkel φ und ψ der Figur 6 zu entnehmen ist. Das der Differenzenrechnung zugrunde zu legende Wertepaar $(h_0; \varrho_0)$ ist so zu wählen, dass im ebenen Schnitt senkrecht zur Rohrachse zwei einander zugeordnete «tiefste» Talpunkte der als stetig vorausgesetzten Rillen

und Kondensatbegrenzung auf ein und denselben Rohrradius zu liegen kommen, womit auch der Forderung nach Symmetrie genügt wird. Für jeden Dampfzustand und Wert der Temperaturdifferenz ϑ können somit verschiedene Profile des Kondensats ermittelt werden. Man erhält die in Figur 7 dargestellte Kurvenschar, wobei jede einzelne der Kurven die Gleichungen (9) bis (14) und die soeben besprochenen Grenzbedingungen erfüllt. Jedem von diesen Profilen entspricht eine gewisse Kondensatmenge der Talströmung, die sich

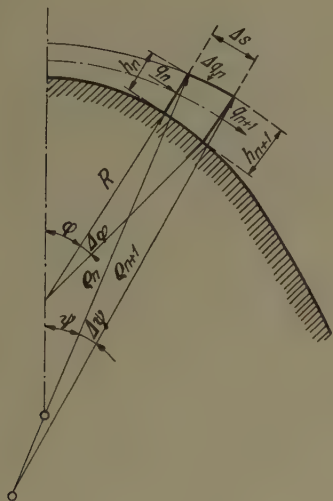


Fig. 6

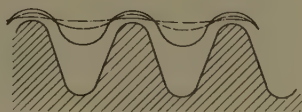


Fig. 7

Kondensatprofile bei verschiedenem Füllgrad der Ablaufrinne.

damit in Funktion der Rohrlänge bestimmen lässt. Die Kondensatmenge, welche in der Richtung der Rohrachse bei gegebenem Profil in der Rille abfließen kann, wurde durch ein Relaxationsverfahren nach SOUTHWELL bestimmt. Figur 8 legt das Endergebnis aller Berechnungen der mittleren (auf die dem Radius des Rillentaies entsprechende Zylinderfläche bezogenen) Wärmeübergangszahlen in Funktion von Rohrlänge, Dampfzustand und Temperaturdifferenz zwischen Satttdampf und Wand dar.

Der plötzliche starke Abfall der Wärmeübergangszahl bei einer gewissen Rohrlänge ist durch den Umstand gegeben, dass die Rillen im unteren Teil des Rohres volllaufen. Hohe, durch die Kapillarkräfte hervorgerufene Druckgradienten werden in diesen Partien vollständig ausgeschaltet. Für die überschwemmten Rillen in den unteren Partien der Rohre ist, wie schon oben erwähnt, laminare Strömung angenommen worden, und die Rechnung des Wärmeüberganges erfolgte nach NUSSELT. Diese Annahme musste getroffen werden, da die kritische Reynoldssche Zahl für eine Kanalströmung mit Profil nach Figur 5 bis jetzt noch unbekannt ist. Vermutlich ist, besonders bei heissem

Kondensat, in der Rille Turbulenz zu erwarten, womit die wirklichen Wärmeübergangszahlen im Gebiete des starken Abfallens (Figur 8) höher als die hier berechneten liegen dürften.

Andererseits ist es auffallend, wie die Wärmeübergangszahl dort, wo die Rillen noch nicht vollgelaufen sind, eine sehr schwache Funktion der Rohrlänge darstellt. Dies ist damit zu erklären, dass die örtlichen Wärmeübergangszahlen

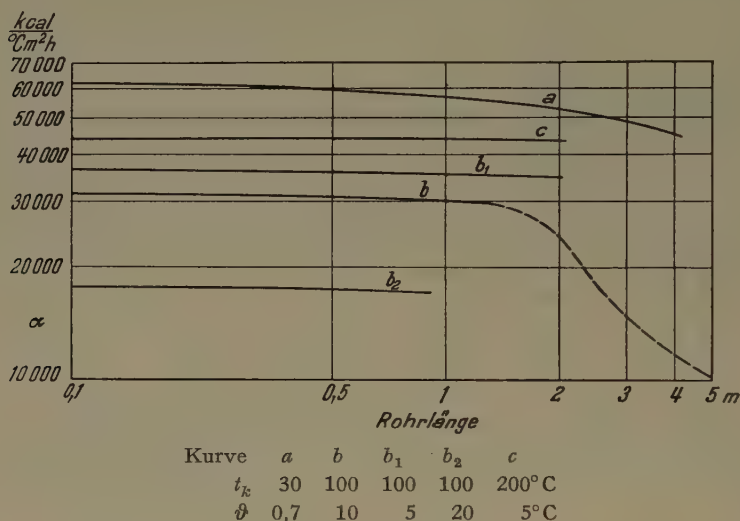


Fig. 8

Mittlere Wärmeübergangszahl in Funktion der Rohrlänge für verschiedene Sattdampftemperaturen und Temperaturdifferenzen ϑ .

in den Scheiteln um so grösser werden, je mehr die wirksame Oberfläche durch das Anschwellen des Kondensatstromes in der Rille vermindert wird (Figur 7). Die Kompensation beider Effekte ist so weitgehend, dass sich mit zunehmender Rohrlänge nur wenig abnehmende, fast konstante Wärmeübergangszahlen ergeben.

3.3. Veränderlichkeit der Stoffwerte

Von allen Stoffwerten ist die Zähigkeit des Kondensats diejenige, deren Veränderlichkeit über die Dicke des Kondensatfilms den stärksten Einfluss auf den Wärmeübergang hat. Eine Berechnung der mit der Filmdicke linear veränderlichen Zähigkeit ergab jedoch, dass man für in der Technik übliche Betriebszustände einfach mit dem arithmetischen Mittelwert der Zähigkeiten an der Dampf- und Wandseite rechnen kann.

3.4. Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit

Die Berechnung des Wärmeüberganges bei einer sinusförmig angenommenen Wandrauigkeit zeigt, dass bei Rauigkeiten von der Grössenordnung $< 0,2$ Filmdicken der Einfluss derselben vernachlässigbar ist.

3.5. Wärmefluss durch die Wand

Die Berechnung des Wärmeflusses durch die Wand (Methode der Quadrate) führte zur Erkenntnis, dass man in Fällen von wärmedurchgangsmässig hoch gezüchteten Kondensatoren die Wand des Wärmedurchgangs aus gut leitendem Material herstellen muss. Gelten die Bezeichnungen:

λ_w = Wärmeleitfähigkeit der Wand,

d = minimale Wanddicke (1 mm in bezug auf die Abmessungen von Figur 5),

Q = übertragene Wärmemenge,

F = Oberfläche des dem Rohr koaxialen Zylinders entsprechend dem Rillental und

Δt_w = mittlerer Temperatursprung in der Wand,

so ergibt sich für alle der Figur 5 geometrisch ähnlichen Wandquerschnitte

$$\Delta t_w = \frac{2,5 d}{\lambda_w} \cdot \frac{Q}{F} \quad (15)$$

4. Messungen

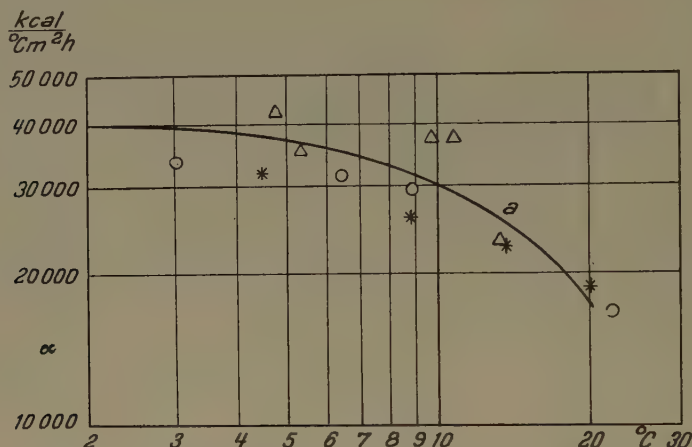
Um die theoretischen Ausführungen überprüfen zu können, müssen natürlich die der Rechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen möglichst weitgehend erfüllt werden. Vor allem gilt dies für Grösse und Form des Profils der Rillen. Die kupfernen Versuchsrohre von 525 mm Länge, 16 mm Innen- und 19,2 mm minimalem Aussendurchmesser wurden durch Fräsen am Umfang mit 29 Rillen versehen. Die Toleranz der Profilmasse betrug $\pm 0,01$ mm. Das Rillenprofil ist in Figur 5 dargestellt. Bei den Versuchen wurde Sattdampf von 100°C verwendet. Die Bestimmung der Wärmemenge erfolgte durch Kondensatmessung.

Versuche in den Escher-Wyss-Laboratorien, Zürich, wurden durchgeführt:

- an glatt polierten Rohren, welche kurz vor dem Versuch 48 h in Lötwasser gelegt worden sind (um Hautkondensation zu erzwingen),
- an ebenfalls glatt polierten, jedoch noch (zur Erzielung guter Benetzung) mit dem Waschmittel «Vel» behandelten Rohren und
- an oxydierten Rohren ohne jegliche Behandlung.

Durch Messung des Kondensats, der Temperatur des Sattdampfes, des Kühlwassers und der Oberfläche der Versuchsrohre wurde die Wärmedurch-

gangszahl bestimmt. Um die Wärmeübergangszahl auf der Dampfseite berechnen zu können, musste, ausser Gleichung (15), noch die Wärmeübergangszahl auf der Wasserseite bekannt sein. Diese wurde nach der Beziehung von KRAUSSOLD bestimmt. Um den Einfluss der Ungenauigkeit dieser Formel möglichst klein zu halten, wurden in den Rohren sehr grosse Wassergeschwindigkeiten eingestellt.



a = gerechnete Kurve für Rauigkeit = 0, \circ ohne Oberflächenbehandlung,

* Oberfläche mit Lötwasser behandelt, Δ Oberfläche mit «Vel» behandelt.

Fig. 9

Versuchsergebnisse an gefrästen Versuchsrohren.

In Figur 9 sind die Ergebnisse von Versuch und Rechnung dargestellt, woraus man die gute Übereinstimmung zwischen den beiden Resultaten sehen kann.

Gefräste Rillenrohre kommen natürlich für die praktische Anwendung nicht in Frage, da sie zu teuer sind. Nach dem guten Ergebnis der Versuche an genau gefrästen Rohren dachte man vielmehr an gezogene Rohre. Bei diesen können aus Herstellungsgründen die Masstoleranzen nicht so klein gehalten werden wie bei den ersteren. Die Versuche wurden deshalb an einem 2510 mm langen, gezogenen, gerillten Rohr wiederholt, um den Einfluss der Ungenauigkeit des Rillenprofils auf die Wärmeübergangszahl zu überprüfen (Figur 10).

In Figur 11 ist die Wärmeübergangszahl an der Kondensationsseite in Funktion der Temperaturdifferenz zwischen Dampf und Wandtemperatur aufgetragen. Die Streuung ist auf die bei unbehandelter Oberfläche durch ein Schauglas beobachtete partielle Tropfenkondensation zurückzuführen. Die gestrichelte Kurve stellt die Rechnungsergebnisse dar; die ausgezogene hingegen ist

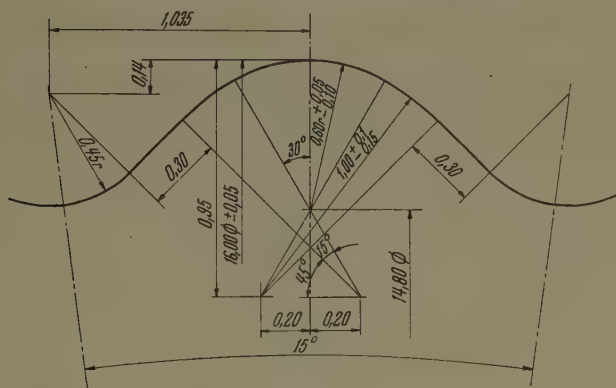


Fig. 10

Rillenprofil der gezogenen Versuchsrohre (Masse in Millimeter).

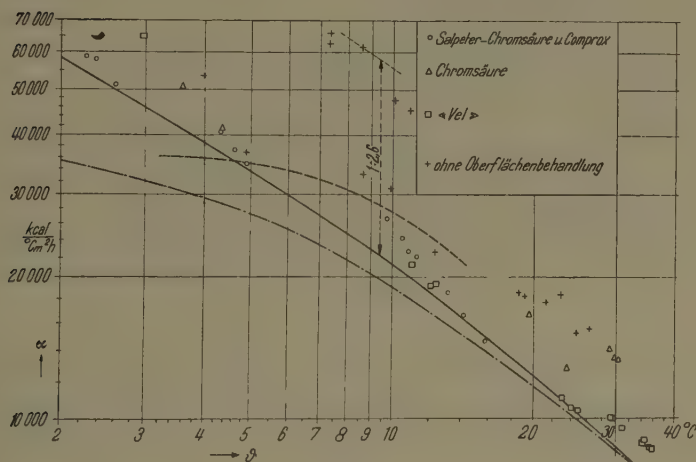


Fig. 11

Versuchsergebnisse an gezogenen Versuchsrohren.

die untere Umhüllende der Messergebnisse. Das Resultat erscheint im Hinblick auf die praktischen Anwendungen als vollauf befriedigend.

5. Modellähnlichkeit

Um sich die Arbeit der Versuche mit Dämpfen anderer Flüssigkeiten zu ersparen, werden hier einige aus einer Ähnlichkeitsbetrachtung hervorgegangene notwendige und hinreichende dimensionslose Kenngrößen angegeben.

5.1. Laminare Strömung in der Ableitungsrille des Kondensats

Die dimensionslose Schreibweise von Gleichung (9) und der Gleichung des Druckverlustes in der Ableitungsrille führt auf folgende zwei dimensionslose Kenngrößen

$$K_1 = \frac{\eta \lambda \vartheta}{r k \gamma \varrho_0} \quad \text{und} \quad K_{2L} = \frac{\alpha \eta \vartheta}{r \gamma^2 \varrho_0^2}.$$

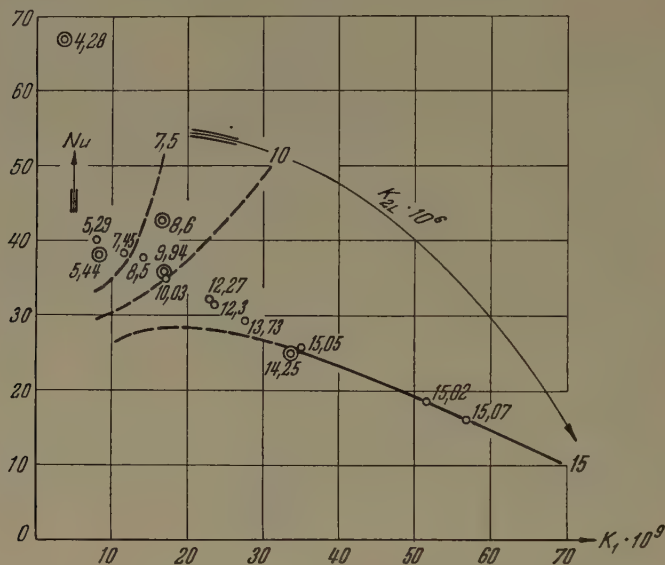


Fig. 12

Graphische Auftragung der Wärmeübergangszahl mittels dimensionsloser Kenngrößen.

Bei laminarer Strömung des Kondensats in den Ableitungsrillen wird die Nusselt-Zahl somit eindeutig durch

$$Nu = \frac{\alpha \varrho_0}{\lambda} = \psi_L \left(\frac{\eta \lambda \vartheta}{r k \gamma \varrho_0}; \frac{\alpha \eta \vartheta}{r k \gamma^2 \varrho_0^2} \right)$$

gegeben (siehe Figur 12).

5.2. Turbulente Strömung in der Ableitungsrille des Kondensats

Mit dem Ansatz von BLASIUS für den Widerstandsbeiwert und diesmal auch bei Berücksichtigung des Wärmeüberganges in der Ablaufrille hat man

$$Nu = \psi_T \left(\frac{\eta \lambda \vartheta}{r k \gamma \varrho_0}; \frac{\alpha^{7/4} \vartheta^{7/4} \eta^{1/4}}{\varrho_0^{5/4} \gamma^2 r^{7/4} g^{3/4}}; Re; Pr \right) \quad (16)$$

mit

$$Re = \frac{\alpha \vartheta \varrho_0}{r \eta g} \quad \text{und} \quad Pr = \frac{c_p \eta g}{\lambda}.$$

Anstatt der zwei Variablen (Re ; Pr) kann man erfahrungsgemäss

$$Re^m Pr^n$$

mit etwa $m = 3/4$ und $n = 1/3$ schreiben, womit sich die Anzahl der Variablen in (16) von vier auf drei reduziert.

6. Zusammenfassung

Nach einer einleitenden Übersicht der Haut- und Tropfenkondensation wird die Hautkondensation an einer unebenen Fläche erörtert. Die Oberflächenspannungen rufen, der verschiedenen Krümmungen der Kondensatoberfläche wegen, sehr starke Druckgradienten hervor. Die Wirkung letzterer kann ein Vielfaches derjenigen des Schwerefeldes betragen (bis zu einigen Zehnerpotenzen). Starke Druckgradienten ergeben aus Gleichgewichtsgründen dünne Kondensathäute, was nach der Theorie von NUSSELT zu sehr grossen Wärmeübergangszahlen führt. Für einen Kondensator mit achsenparallel gerillten, vertikalen Rohren werden bei gegebenen geometrischen Verhältnissen die durch Differenzenrechnung erhaltenen Wärmeübergangszahlen angegeben. Letztere wurden durch Versuche bestätigt. Kennzahlen der Modellähnlichkeit bestimmen die Nusseltsche Zahl des Wärmeüberganges.

Summary

Following a synopsis on film- and drop-condensation, one deals with condensation on an uneven surface. The surface tensions give rise to very great pressure gradients because of the different curvatures of the surface of the condensate. The action of the latter can amount to a multiple (up to a few powers with basis ten) of the value corresponding to the gravitation. Large gradients of pressure produce thin films of condensate, and according to the theory of NUSSELT they lead to large coefficients of heat transmission. Heat transfer coefficients are given determined with calculus of finite differences for a condenser with vertical tubes, grooves parallel to the tube axis and given geometrical form. The latter are confirmed by tests. Adimensional numbers determinate the NUSSELT number.

(Eingegangen: 19. Februar 1953.)

Die exakte Lösung der Integralgleichungen gewisser Schwingungsprobleme

VON JENS RAINER MARIA RADOK¹⁾ und ALFRED HELLER, Zürich²⁾

1. Einleitung

Die Schwingungsprobleme gewisser dynamischer Systeme mit polynomialen Massen- und Steifheitsverteilungen lassen sich leicht auf Fredholmsche Integralgleichungen mit entarteten symmetrischen Kernen zurückführen. Die Lösung solcher Integralgleichungen hat jedoch bisher grosse Schwierigkeiten bereitet, so dass man fast immer gezwungen war, Näherungsmethoden zu verwenden.

In dieser Abhandlung ist eine Methode entwickelt worden, die mit dem bekannten Iterationsverfahren³⁾ verwandt ist. Es wird nämlich gezeigt, dass man durch geschickte Wahl der Ausgangsfunktion, die durch den Kern bestimmt wird, zu Potenzreihen für die Eigenfunktionen kommen kann. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen genügen besonders einfachen Rekursionsformeln, mit deren Hilfe man schliesslich nur eine endliche Anzahl willkürlicher Konstanten erhält. Diese restlichen Konstanten führen dann auf die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte.

Es liegt in der Natur des eben angedeuteten Prozesses, dass der Übergang zu den exakten Lösungen und der exakten charakteristischen Gleichung rein formell durchgeführt werden kann. Die Potenzreihen, die man durch diese Methode erhält, haben Koeffizienten, die Potenzen der Frequenzen im Zähler und Fakultäten im Nenner enthalten, so dass in jedem Fall die Konvergenzbetrachtungen sehr einfach werden.

Im zweiten Teil dieser Mitteilung wird die Integralgleichung für symmetrische Biegeschwingungen von Balken abgeleitet, wobei die Krümmung der Balkenachse als unbekannte Veränderliche eingeführt wird. Im Falle dieses einfachen Problems bereitet die direkte Ableitung dieser Gleichung aus der Differentialgleichung keine Schwierigkeit. Die asymmetrischen Biegeschwingungen lassen sich genau gleich behandeln, während es in komplizierteren Fällen vorzuziehen ist, zum Beispiel das Hamiltonsche Prinzip anzuwenden⁴⁾.

¹⁾ Sonst Aeronautical Research Laboratory, Department of Supply, Melbourne, Australia.

²⁾ Institut für Flugzeugstatik, ETH.

³⁾ W. SCHNEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950).

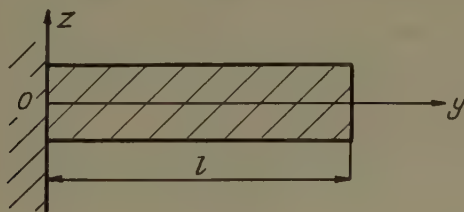
⁴⁾ J. R. M. RADOK, *Dynamic Aeroelasticity*, Rep. 58 (College of Aeronautics, Cranfield, England).

Die allgemein zu verwendende Methode ist im dritten Teil für einen speziellen Kerntypus entwickelt, während in den letzten zwei Teilen diese Methode auf die Lösung zweier Probleme angewandt ist, deren exakte Lösungen seit langem bekannt sind. Das erste dieser Probleme befasst sich mit den Schwingungen eines gleichförmigen Balkens¹⁾, während das zweite diejenigen des fest eingespannten Keiles²⁾ untersucht. In beiden Fällen wird gezeigt, dass die Methode auf die exakten Lösungen führt.

2. Ableitung der Bewegungsgleichungen

Es ist bereits in der Einleitung erwähnt worden, dass die Untersuchung dieser Abhandlung auf der Basis der zuständigen Integralgleichungen ausgeführt werden soll. Wie sich sogleich zeigen wird, sind diese Gleichungen von demselben Typus, unabhängig davon, ob der Balken an einem Ende eingespannt oder ob beide Enden frei sind. Nachdem die Integralgleichung in jedem Falle die Randbedingungen implizit enthält, das heisst, nachdem ihre Lösungen automatisch diese Bedingungen erfüllen, wird es das Ziel dieses Paragraphen sein, eine allgemeingültige Integralgleichung für die zu betrachtenden Fälle abzuleiten.

Man betrachte den Balken von Figur 1, der am Ende $y = 0$ eingespannt



Figur 1

und am Ende $y = l$ frei sei. Die Massenverteilung und Steifheit des Balkens an der Stelle y seien

$$m(y) \quad \text{und} \quad EI(y),$$

so dass bei dynamischer Belastung, auf Grund der Bernoulli-Euler-Formel, die Gleichgewichtsbedingung an der Stelle y folgende Form hat:

$$m(y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI(y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = m(y) \ddot{z} + [EI(y) z'']'' = 0. \quad (2.1)$$

¹⁾ S. TIMOSHENKO, *Schwingungsprobleme der Technik* (Springer, Berlin 1932).

²⁾ G. R. KIRCHHOFF, *Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt*, Berliner Mber., 1879.

Dazu kommen die Randbedingungen

$$z(0, t) = z'(0, t) = E I(y) z''(y, t)_{y=l} = [E I(y) z''(y, t)]'_{y=l} = 0, \quad (2.2)$$

von denen die zwei letzten das Verschwinden des Biegemomentes und der Querkraft am freien Balkenende ausdrücken.

Integriert man die Gleichung (2.1) zweimal von u bis l und von v bis l , so erhält man, unter Benützung der zwei letzten Bedingungen von (2.2), die Gleichung

$$\int_v^l du \int_u^l m(y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dy + E I(v) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0, \quad (2.3)$$

die sich jetzt auf das Gleichgewicht der Biegemomente im Abschnitt $y = v$ und $y = l$ bezieht. Die Gleichung (2.3) ist aber noch keine reine Integralgleichung, indem ihre Lösungen jetzt zwar die letzten beiden Bedingungen von (2.2) erfüllen, die bei ihrer Ableitung benützt wurden, nicht aber die übrigen Bedingungen (2.2).

Um diese Bedingungen auch noch in Betracht zu ziehen, kann man jetzt auf zwei verschiedene Arten verfahren, von denen die eine auf die Integralgleichung für die Auslenkungen z , die andere auf eine äquivalente Gleichung für die Krümmungen z'' führt. Die zweite Methode soll hier verwendet werden, da dann die Lösungen direkt zu Biegemomenten führen, die vom praktischen Standpunkt aus von grösstem Interesse sind. Dazu kommt, dass man im Falle einer Näherungslösung die Auslenkungen, das heisst die Schwingungsformen, durch zweimalige Integration erhalten kann, wodurch etwaige Fehler bekannterweise reduziert werden.

Zur weiteren Transformation der Gleichung (2.3) betrachte man jetzt die folgende Beziehung, die auf Grund der ersten zwei Bedingungen von (2.2) berechtigt ist:

$$\ddot{z}(y, t) = \int_0^y \frac{\partial \dot{z}}{\partial \eta} d\eta = \int_0^y d\eta \int_0^\eta \frac{\partial^2 \dot{z}}{\partial \zeta^2} d\zeta = \int_0^y d\eta \int_0^\eta \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta. \quad (2.4)$$

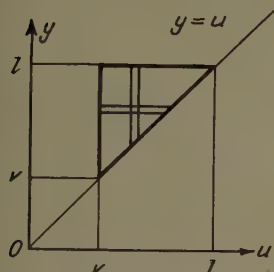
Bevor man von (2.4) in (2.3) einsetzt, sollen die Doppelintegrale in diesen beiden Ausdrücken umgedreht werden. Unter Benützung der Figuren 2a, 2b findet man leicht an Stelle von (2.3) und (2.4)

$$\int_v^l m(y) \ddot{z}(y, t) (y - v) dy + E I(v) z''(v, t) = 0 \quad (2.3')$$

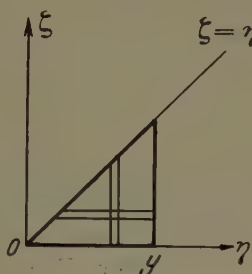
und

$$\int_0^y \ddot{z}''(\zeta, t) (y - \zeta) d\zeta = \ddot{z}(y, t). \quad (2.4')$$

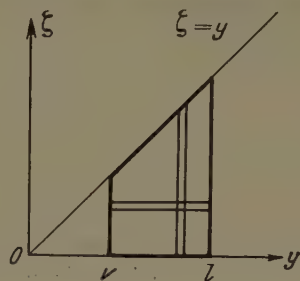
Setzt man jetzt (2. 4') in (2. 3') ein und reduziert wiederum das Doppelintegral durch Vertauschen der Integrationen auf ein einfaches Integral (unter Benützung von Figur 2c), so erhält man schliesslich die endgültige Integralgleichung



Figur 2a



Figur 2b



Figur 2c

für die Schwingungen des eingespannten Balkens, wobei die Krümmung z'' die unbekannte Veränderliche ist:

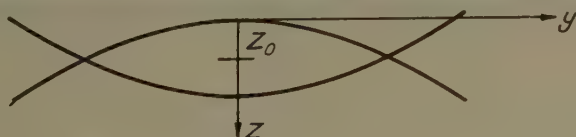
$$\int_0^l \bar{\mu}^2(\zeta, y) \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta + E I(y) z''(y, t) = 0 \quad (2.5)$$

mit

$$\bar{\mu}^2(\zeta, y) = \int_{\zeta, y}^l m(u) (u - \zeta) (u - y) du. \quad (2.6)$$

Dabei steht $\bar{\zeta}, \bar{y}$ für den grösseren Wert von ζ oder y .

Als nächstes betrachte man den sich frei im Raum bewegenden Balken. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, soll die augenblickliche Untersuchung auf symmetrische Verformungen des Balkens beschränkt werden. Beim freien Balken verlangen Impuls- und Drallsatz, dass der Gesamtimpuls und der Gesamtdrall dauernd verschwinden. Aus dem Impulssatz folgt zunächst, dass der Schwerpunkt S des Balkens, dessen Länge nun $2l$ sein soll, sich nicht bewegt.



Figur 3

In dem mitbewegten Koordinatensystem (y, z) (siehe Figur 3) besitze S die Koordinaten $(0, z_0)$. Die Auslenkung des Balkenelementes an der Stelle y bezüglich des ruhenden Schwerpunktes ist dann

$$z(y, t) - z_0(y, t)$$

und seine absolute Beschleunigung

$$\ddot{z}(y, t) - \ddot{z}_0(y, t) .$$

Die Bedingung, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses verschwinde, nimmt daher folgende Form an:

$$\int_{-l}^{+l} m(y) \ddot{z}(y, t) dy - 2 M \ddot{z}_0(t) = 0 , \quad (2.7)$$

wobei

M = Masse des halben Balkens.

(2.7) kann man jetzt wieder so umformen, dass unter dem Integral \ddot{z} durch \ddot{z}'' ersetzt wird. Die Gleichung (2.7) erhält dann die Form:

$$\int_0^{+l} \mu^1(\xi) \ddot{z}''(\xi, t) d\xi - M \ddot{z}_0(t) = 0 , \quad (2.7')$$

wo

$$\mu^1(\xi) = \int_{\xi}^l m(v) (v - \xi) dv . \quad (2.8)$$

(Der Drallsatz liefert bei den symmetrischen Schwingungen keine Aussage.)

Um jetzt die Integralgleichung für den freien Balken abzuleiten, kann man gleich vorgehen wie beim einseitig eingespannten Stab. Die Randbedingungen (2.2) behalten ihre Gültigkeit. In (2.1), (2.3), (2.3') ist an Stelle von \ddot{z} die neue Beschleunigung $\ddot{z} - \ddot{z}_0$ einzusetzen. Statt (2.5) erhält man so:

$$\int_0^l \bar{\mu}^2(y, \xi) \ddot{z}''(\xi, t) d\xi - \mu^1(y) \ddot{z}_0(t) + E I(y) z''(y, t) = 0 . \quad (2.5')$$

Eliminiert man jetzt \ddot{z}_0 zwischen den Gleichungen (2.5') und (2.7'), was im Sinne der allgemeinen dynamischen Theorie bedeutet, dass z_0 eine verborgene Koordinate ist, so findet man schliesslich die gesuchte Integrodifferentialgleichung

$$E I(y) z''(y, t) + \int_0^l K(y, \xi) \ddot{z}''(\xi, t) d\xi = 0 , \quad (2.9)$$

wo

$$K(y, \xi) = \bar{\mu}^2(y, \xi) - \frac{\mu^1(y) \mu^1(\xi)}{M} . \quad (2.10)$$

Bisher wurde angenommen, dass die Masse des Balkens stetig verteilt sei. Man sieht aber aus der Definition der Grössen μ^1 , $\bar{\mu}^2$, dass man in der Balkenmitte eine konzentrierte Masse $2 M_0$ hinzufügen kann, ohne diese Massenfunktionen

zu ändern, da sie nur von der Masse zwischen der Schnittstelle und dem freien Balkenende beeinflusst werden. Definiert man also die Gesamtmasse des halben Balkens mit beliebiger longitudinaler Massenverteilung $m(y)$ als

$$M = \int_0^l m(y) dy + M_0, \quad (2.11)$$

so sieht man sofort, dass die Gleichung (2.10), wie zu erwarten war, für alle vorgeschlagenen Probleme zuständig ist. So erhält man zum Beispiel für $M_0 = \infty$ die ursprüngliche Gleichung (2.5) für den eingespannten Balken, während $M_0 = 0$ dem Balken ohne konzentrierte Masse entspricht.

Schliesslich soll noch eine kurze Bemerkung über die Ableitung von ähnlichen Integralgleichungen für kompliziertere Probleme derselben Art gemacht werden. So mag es zum Beispiel wünschenswert sein, nicht nur symmetrische, sondern auch antisymmetrische Schwingungen zu studieren. Oder es mögen Torsionsschwingungen von Interesse sein. Beim Flugzeug handelt es sich meist nicht nur um einen einfachen Balken, sondern um zwei oder mehrere Balken, die aufeinander senkrecht stehen (Rumpf, Flügel, Schwanzfläche) und Biege- wie auch Torsionsschwingungen unterliegen. Alle diese Probleme bedeuten eine Verallgemeinerung des oben behandelten Problems in dem Sinne, dass die elastischen Massensysteme eine grössere Anzahl von Freiheitsgraden haben oder dass noch weitere verborgene Koordinaten vorhanden sind. Den Fall antisymmetrischer Schwingungen des freien Balkens kann man zum Beispiel durch die Einführung einer Rotation um den Schwerpunkt studieren. Zu den Bedingungen (2.2) hat man jetzt aber die Bedingung des Verschwindens des Dralls hinzuzufügen.

Im allgemeinen ist es aber in komplizierteren Fällen nicht mehr so einfach, die zuständigen Bewegungsgleichungen durch ähnliche Überlegungen abzuleiten. Es ist daher besser, auf die Prinzipien der allgemeinen Dynamik, das heisst auf die Lagrangeschen Gleichungen oder auf das Hamiltonsche Prinzip zurückzugreifen. In der Tat sind die Gleichungen auf diesem Wege für ein Flugzeug mit Pfeilflügel und Rumpf in der Arbeit von RADOK¹⁾ abgeleitet worden, und es ist dort gezeigt worden, wie die Probleme dieser Abhandlung als Sonderfälle herauskommen.

3. Probleme natürlicher Schwingungen und ihre angenäherte Lösung

Setzt man jetzt voraus, dass der Balken natürliche Schwingungen ausführt, so kann man schreiben

$$z''(y, t) = e^{i\omega t} Z(y). \quad (3.1)$$

¹⁾ J. R. M. RADOK, *Dynamic Aeroelasticity*, Rep. 58 (College of Aeronautics, Cranfield, England).

Damit erhält (2. 9) die Form

$$E I(y) Z(y) - \omega^2 \int_0^l K(y, \varphi) Z(\varphi) d\varphi = 0. \quad (3. 2)$$

Diese Gleichung wird leicht in eine Fredholm-Integralgleichung zweiter Art umgewandelt, indem man folgende Transformation einführt:

$$\bar{Z}(y) = \sqrt{E I(y)} Z(y), \quad \bar{K}(y, \varphi) = \frac{K(y, \varphi)}{\sqrt{E I(y)} \sqrt{E I(\varphi)}}, \quad (3. 3)$$

so dass man jetzt anstatt (3. 2) die Gleichung

$$\bar{Z}(y) - \omega^2 \int_0^l \bar{K}(y, \varphi) \bar{Z}(\varphi) d\varphi = 0 \quad (3. 2')$$

erhält.

Dieses ist die Grundgleichung der späteren Untersuchungen, und die anzuwendende angenäherte Lösungsmethode soll jetzt kurz beschrieben werden. Es soll angenommen werden, dass der Kern \bar{K} ausgeartet ist in dem Sinne, dass er ein homogenes Polynom n -ten Grades in φ und y ist¹⁾.

$$\left. \begin{aligned} P_n(\varphi, y) &= a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} \varphi + \dots + a_1 y \varphi^{n-1} + a_0 \varphi^n \quad (\varphi < y), \\ P_n(y, \varphi) &= a_n \varphi^n + a_{n-1} \varphi^{n-1} y + \dots + a_1 \varphi y^{n-1} + a_0 y^n \quad (\varphi > y). \end{aligned} \right\} \quad (3. 4)$$

Es ist leicht einzusehen, dass \bar{K} immer symmetrisch ist, so dass

$$[P_n(\varphi, y)]_{y > \varphi} = [P_n(y, \varphi)]_{\varphi > y}.$$

Ein solcher Kern entspricht einer Massenverteilung, die selbst durch ein Polynom dargestellt werden kann.

Weiterhin soll die Gleichung (3. 2') noch normalisiert werden, das heisst, das Integrationsintervall soll von 0 bis 1 gehen, so dass die Gleichung jetzt die folgende Form hat

$$\bar{Z}(y) - \omega^2 \int_0^1 \bar{K}(y, \varphi) \bar{Z}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (3. 2'')$$

Ist die Länge l nicht gleich 1, so verursacht die entsprechende Umformung nur eine Änderung des Frequenzparameters ω^2 .

¹⁾ In den Beispielen treten etwas allgemeinere Kerne auf, die aber ebenfalls entsprechend der folgenden Theorie behandelt werden können.

Man betrachte jetzt den Integraloperator

$$L \bar{Z}(\varphi) = \int_0^y P_n(\varphi, y) \bar{Z}(\varphi) d\varphi + \int_y^1 P_n(y, \varphi) \bar{Z}(\varphi) d\varphi, \quad (3.5)$$

für $\bar{Z}(\varphi) = \varphi^m$.

$$L \varphi^m = y^{(m+1)+n} \left\{ \frac{n a_n}{(m+1)(m+n+1)} + \frac{(n-2) a_{n-1}}{(m+2)(m+n)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(2-n) a_1}{(m+n)(m+2)} + \frac{(-n) a_0}{(m+n+1)(m+1)} \right\} \\ + a_0 \frac{y^n}{m+1} + a_1 \frac{y^{n-1}}{m+2} + \dots + a_{n-1} \frac{y}{m+n} + a_n \frac{1}{m+n+1}. \quad (3.6)$$

Der Operator transformiert also eine beliebige Potenz von φ in die Form

$$L \varphi^m = y^{(m+1)+n} C_m + P_n^m(y), \quad (3.6')$$

wobei das neue Polynom $P_n^m(y)$ wiederum vom Grad n ist. Dieses Resultat gibt einen Hinweis für den Ansatz der Potenzreihe, mit der Fredholm-Gleichungen des obigen Typs immer annähernd gelöst werden können.

Man setze nämlich die Lösung \bar{Z} der Gleichung (3.2'') in der folgenden allgemeinen Form an:

$$\bar{Z}(\varphi) = \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \varphi^{j(n+1)+l}. \quad (3.7)$$

Bricht man jetzt die Reihe im Sinne einer Approximation bei $j = k$ ab, so ist der Fehler

$$\omega^2 \sum_{l=0}^n A_{l,k} y^{(k+1)(n+1)+l} C_{j(n+1)+l}. \quad (3.8)$$

Durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von y ergeben sich Beziehungen zwischen den Konstanten A_l . In der Tat führt (3.7) nach Anwendung von (3.6') bei Vergleich der Potenzen von y mit Exponenten $> n$ zur Rekursionsformel

$$A_{l,j} = \omega^2 A_{l,j-1} C_{(j-1)(n+1)+l}, \quad (j = 1, 2, \dots, k; l = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (3.9)$$

durch welche man die $A_{l,j}$ durch die $A_{l,0}$ ausdrücken kann. Zudem sieht man von (3.6) und der Definition von C_m , dass die Koeffizienten $A_{l,j}$ durch $A_{l,0}$ ausgedrückt im Nenner Fakultäten von der Ordnung $j(n+1)+l$ enthalten werden, während man im Zähler Polynome von ω^2 vom Grad n hat. Daher werden die angesetzten Lösungen für genügend grosse k gut konvergieren.

Schliesslich gibt der Koeffizientenvergleich der Potenzen von y mit Exponenten $\leq n$ das folgende System von $n + 1$ Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A_{n,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_0}{j(n+1) + l + 1}, \\ A_{n-1,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_1}{j(n+1) + l + 2}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{1,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_{n-1}}{j(n+1) + l + n}, \\ A_{0,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_n}{j(n+1) + l + n + 1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

das mit Hilfe von (3. 9) so reduziert werden kann, dass es nur die $n + 1$ Konstanten $A_{l,0}$ enthält. Nach dieser Reduktion kann man dann aber die Koeffizienten $A_{1,0} - A_{n,0}$ durch $A_{0,0}$ ausdrücken und in der letzten Gleichung einsetzen. Auf diese Weise erhält man ein Polynom in ω^2 von der Ordnung kn . Damit die Konstante $A_{0,0}$ endliche Werte haben kann, muss ω^2 eine Wurzel dieses Polynoms sein. Somit ist dieses Polynom die charakteristische Gleichung für die Bestimmung der Eigenwerte, und die Eigenfunktionen sind durch (3. 7) gegeben.

Es wird nun von Interesse sein, diese Lösungsmethode an praktischen Problemen auszuprobieren. Aus der vorausgehenden Betrachtung ergibt sich nämlich, dass die Wahl einer grösseren Summationsgrenze die Form der Lösungen nicht ändert. Aus diesem Grunde und wegen der guten Konvergenz der Konstanten $A_{j,l}$ kann man jetzt vermuten, dass die angenäherten Lösungen (3. 7) die ersten Glieder der Potenzreihenentwicklungen der exakten Lösungen repräsentieren. Daraus würde folgen, dass die ersten $n + 1$ Glieder des Polynoms für die Bestimmung der Frequenzen den Gliedern der exakten charakteristischen Gleichung entsprechen werden.

Somit erhält man die Möglichkeit, die Eigenfunktionen und Eigenwerte numerisch beliebig genau zu approximieren durch eine entsprechende Wahl der Summationsgrenze k . Auf der andern Seite sieht man auch, dass, nach Beobachtung der Gesetzmässigkeit in der Bildung der Rekursionsformel und der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms, der Schritt von k zu $k + 1$ rein formell ausgeführt werden kann, so dass die Methode bei numerischen Rechnungen den gleichen grossen Vorzug hat, den auch die Iterationsmethode bietet, indem jeder Schritt zu einer verbesserten Lösung führt. Durch die jetzige Methode erhält man alle gewünschten Eigenfunktionen und Eigenwerte auf einmal, wobei Anzahl und Genauigkeit durch k festgelegt sind. Vergrössert

man k , so erweitert sich die Säkulargleichung für die Eigenwerte ohne Änderung der bereits berechneten Glieder um zusätzliche höhere Potenzen.

In den folgenden zwei Paragraphen soll die eben abgeleitete Methode auf zwei Schwingungsprobleme angewandt werden, von denen exakte Lösungen bekannt sind. Es handelt sich dabei um die Probleme des schwingenden, eingespannten, gleichmässigen Balkens und des eingespannten vollen Keiles. Dabei sollen jedoch nicht die oben abgeleiteten Formeln benützt werden. An deren Stelle werden die gewünschten Formeln direkt abgeleitet, und es wird gezeigt werden, dass in der Tat die versprochenen Annäherungen resultieren.

4. Schwingungen von Balken konstanter Massen- und Steifheitsverteilung

Obwohl am Ende nur der Fall des eingespannten Balkens behandelt werden soll, werden doch die allgemeineren Formeln für den freien Balken mit einer Masse in der Mitte abgeleitet. Setzt man also

$$m(y) = \frac{M}{l}, \quad M_0 = k M, \quad (4.1)$$

so erhält man von (2. 10), (2. 8), (2. 6)

$$\frac{M}{l} K(y, \xi) = \bar{l}^2(y, \xi) - \frac{l^1(y) l^1(\xi)}{l(1+k)}, \quad (4.2)$$

wo

$$\bar{l}^2(y, \xi) = \int_{y, \xi}^l (w - \xi) (w - y) dw, \quad (4.3)$$

$$l^1(y) = \int_y^l (w - y) dw. \quad (4.4)$$

Daher hat man für den Kern

$$\frac{M}{l} K(y, \xi) = \begin{cases} (l-y)^2 \left[\frac{l-y}{3} + \frac{y-\xi}{2} - \frac{(l-\xi)^2}{4l(1+k)} \right] & (y > \varphi) \\ (l-y)^2 \left[\frac{l-\xi}{3} + \frac{\xi-y}{2} - \frac{(l-y)^2}{4l(1+k)} \right] & (y < \varphi) \end{cases} \quad (4.5)$$

Normalisiert man jetzt durch Einführung der Koordinaten

$$\frac{y}{l} = Y, \quad \frac{\xi}{l} = X \quad (4.6)$$

und führt die neuen Veränderlichen

$$\varphi = 1 - Y, \quad \psi = 1 - X \quad (4.7)$$

ein, was einer Verlagerung des Koordinatenursprunges an die Balkenspitze entspricht, so nimmt die Integralgleichung (3. 2') die folgende Form an:

$$\bar{Z}(\varphi) = \lambda \left\{ \int_0^\varphi \psi^2 \left[\frac{\psi}{3} + \frac{\varphi - \psi}{2} - \frac{\varphi^2}{4(1+k)} \right] \bar{Z}(\psi) d\psi + \int_\varphi^1 \varphi^2 \left[\frac{\varphi}{3} + \frac{\psi - \varphi}{2} - \frac{\psi^2}{4(1+k)} \right] \bar{Z}(\psi) d\psi \right\} \quad (4.8)$$

wobei

$$\lambda = \frac{\omega^2 M b^3}{K}. \quad (K = E I = \text{Balkensteifheit}) \quad (4.9)$$

Den Integraloperator auf der rechten Seite transformiert nun die Potenz φ^n in den Ausdruck

$$\frac{\varphi^{n+4} n!}{(n+4)!} - \frac{\varphi^3}{6(n+1)} + \varphi^2 \left[\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{4(1+k)(n+3)} \right]. \quad (4.10)$$

Daher kann man das allgemeine Resultat von m Iterationsschritten mit der Anfangsfunktion

$$A \varphi^3 + B \varphi^2,$$

die durch die Formel (4.10) angedeutet ist, in der Form

$$\bar{Z}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \{A_j \varphi^{4j-1} + B_j \varphi^{4j-2}\} \quad (4.11)$$

schreiben. Postuliert man nun den Fehler

$$\lambda A_m \frac{\varphi^{4m+3} (4m-1)!}{(4m+3)!} + \lambda B_m \frac{\varphi^{4m+2} (4m-2)!}{(4m+2)!}, \quad (4.12)$$

so erhält man durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von φ nach Anwendung von (4.10)

$$A_j = \frac{\lambda^{j-1} 3!}{(4j-1)!} A_1, \quad B_j = \frac{\lambda^{j-1} 2!}{(4j-2)!} B_1, \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 + \lambda \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{24j} + \lambda \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{6(4j-1)} &= 0, \\ B_1 - \lambda \sum_{j=1}^m A_j \left\{ \frac{1}{2(4j+1)} - \frac{1}{4(1+k)(4j+2)} \right\} \\ - \lambda \sum_{j=1}^m B_j \left\{ \frac{1}{8j} - \frac{1}{4(1+k)(4j+1)} \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

wobei die letzten zwei Bedingungen von φ^3 und φ^2 herrühren. Ersetzt man in (4.14) A_j, B_j durch ihre Werte (4.13), so findet man schliesslich die zwei homogenen Gleichungen für A_1, B_1 , die eine endliche Lösung dann und nur dann haben können, wenn die folgende Determinantengleichung erfüllt ist.

$$\left| \begin{array}{cc} 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!}; & \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!} \\ 3 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!} \left\{ \frac{1}{2(1+k)(4j+2)} - \frac{1}{(4j+1)} \right\}; & 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-2)!} \left[\frac{1}{2(1+k)(4j+1)} - \frac{1}{4j} \right] \end{array} \right| = 0. \quad (4.15)$$

Jetzt führe man die Voraussetzung ein, dass der Balken eingespannt ist. Zu diesem Zwecke setzt man $k = \infty$ und erhält aus (4. 15) das Polynom in λ :

$$\left. \begin{aligned} 1 + \sum_{j=1}^m \lambda^j \left\{ \frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j)(4j-2)!} \right\} - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-2)! 4l} \\ + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!(4j+1)} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)!} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4. 16)$$

Da aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j)(4j-2)!} &= \frac{2-4j}{(4j)!} \\ \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)! 4l} &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^j \frac{1}{[4(j-l+4)]!} \cdot \frac{1}{(4l-2)! 4l} \\ &+ \sum_{j=m}^{2m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=j}^{2m-1} \frac{1}{[4(j-l+m)]! [4(l-m+1)-2]! 4(l-m+1)}, \\ \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!(4j+1)} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^j \frac{1}{[4(j-l+1)-1]! (4l-1)! (4l+1)} \\ &+ \sum_{j=m}^{2m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=j}^{2m-1} \frac{1}{[4(j-l+m)-1]! [4(l-m+1)-1]! [4(l-m+1)+1]}, \end{aligned}$$

nimmt (4. 16) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\lambda}{12} + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+1} \left[\sum_{l=1}^j \frac{1}{[4(j-l+1)]! (4l+1)!} \right. \\ \left. \{ [4(j-l+1)][4l] - [4l-1][4l+1] \} - \frac{2+4j}{(4j+4)!} \right] \\ + \sum_{j=m}^{2m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=j}^{2m-1} \frac{1}{[4(j-l+m)]! [4(l-m+1)+1]!} \\ \{ [4(l-m+1)][4(j-l+m)] - [4(l-m+1)-1][4(l-m+1)+1] \} = 0. \end{aligned} \quad (4. 16')$$

Dieser Ausdruck kann aber noch vereinfacht werden. Dieses soll aber nur mit dem Glied in eckigen Klammern unter dem ersten Summenzeichen durchgeführt werden, um zu zeigen, dass die ersten Glieder des Polynoms mit den entsprechenden Gliedern der exakten charakteristischen Gleichung übereinstimmen. Für den eingespannten Balken ist diese bekannterweise

$$\cosh \sqrt[4]{\lambda} \cos \sqrt[4]{\lambda} + 1 = 2 \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j+1} (-1)^{j+1}}{[4(j+1)]!} \lambda^j \right\} = 0. \quad (4. 17)$$

Somit muss die folgende Identität bewiesen werden, da man für $j = 0$ unmittelbar das Glied $-\lambda/12$ erhält:

$$\sum_{l=1}^j \frac{[4(j-l+1)][4l] - [4l-1][4l+1]}{[4(j-l+1)]! [4l+1]!} - \frac{2+4j}{(4j+4)!} = \frac{(-1)^{j+1} 2^{2j+1}}{[4j+1]!} \quad (4.18)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^j \frac{[4(j+1)]!}{[4(j-l+1)]! (4l+1)!} \{[4(j-l+1)][4l] - [4l-1][4l+1]\} \\ &= \sum_{l=1}^j \left[(4j+4) \left\{ \binom{4j+3}{4l} - \binom{4j+3}{4l-1} \right\} - \binom{4j+4}{4l+1} + \binom{4j+4}{4l} \right] \\ &= \sum_{l=1}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} \right\}, \end{aligned}$$

da

$$\binom{4j+3}{4l} - \binom{4j+3}{4l-1} = 0.$$

Schliesslich hat man

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} \right\} &= \sum_{l=0}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} \right\} + 4j+3 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} + \binom{4j+4}{4l+2} - \binom{4j+4}{4l+3} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+2} \right\} + 4j+3 \\ &= -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{2j+2} \binom{4j+4}{2l} (-1)^l + 4j+3 \\ &= 4j+2 + \frac{1}{4} \{ (1+i)^{4j+4} + (1-i)^{4j+4} \} = 4j+2 + 2^{2j+1} (-1)^{j+1}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Man sieht also, dass die $(m+1)$ ersten Glieder der charakteristischen Gleichung (4.16') mit den entsprechenden Gliedern der exakten Gleichung übereinstimmen. Die weiteren Glieder in (4.16') entstehen als Resultat der Annäherung und können vernachlässigt werden in dem Sinne, dass man die Summationsgrenze m genügend gross wählt, um die erwünschte Genauigkeit zu erhalten.

Von (4.15) findet man, dass in jedem Falle, das heisst, was immer auch der Wert von m ist,

$$B_1 = -A_1 \frac{1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!}}{\frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!}}, \quad (4.19)$$

und daher erhält man für die angenäherte Lösung von (4. 11)

$$\bar{Z}_\lambda(\varphi) = A \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\lambda^{j-1}}{(4j-1)!} \varphi^{4j-1} - \left[\frac{1 + \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l)!}}{\sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)!}} \right] \frac{\lambda^{j-1}}{(4j-2)!} \varphi^{4j-2} \right\}. \quad (4. 20)$$

Dieser Ausdruck bestimmt für jedes λ , das die charakteristische Gleichung erfüllt, die entsprechende angenäherte Schwingungs-Krümmungs-Linie.

Lässt man jetzt $m \rightarrow \infty$, was augenscheinlich erlaubt ist, da alle Reihen konvergieren, so findet man leicht

$$\bar{Z}_\lambda(\varphi) = A \lambda^{-3/4} \left\{ \sinh(\lambda^{1/4} \varphi) - \sin(\lambda^{1/4} \varphi) - \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh \lambda^{1/4} + \cos \lambda^{1/4}}{\sinh \lambda^{1/4} - \sin \lambda^{1/4}} \right] [\cosh(\lambda^{1/4} \varphi) - \cos(\lambda^{1/4} \varphi)] \right\}, \quad (4. 21)$$

das heisst die seit langem bekannten exakten Lösungen.

5. Schwingungen des eingespannten Keiles

Dieses Problem ist im Jahre 1879 durch G. R. KIRCHHOFF¹⁾ exakt gelöst worden, indem er von der Differentialgleichung ausging und zeigte, dass die Schwingungslinien mit Hilfe von Bessel-Funktionen ausgedrückt werden können.

In diesem Falle sind sowohl die Massen- wie auch die Steifheitsverteilung Funktionen der Längskoordinate des Balkens.

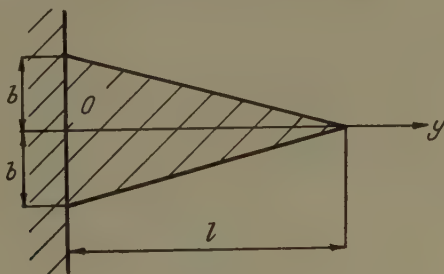


Fig. 4

Setzt man für die Breite 1

$$I(y) = \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3}{l^3} (l-y)^3, \quad (5. 1)$$

$$m(y) = \frac{2b\rho}{l} (l-y), \quad (5. 2)$$

¹⁾ G. R. KIRCHHOFF, Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt, Berliner Mber., 1879.

so erhält man von (2. 6)

$$\bar{\mu}(\zeta, \gamma) = \frac{2 \varrho \ell E}{6 \ell E} \left\{ \begin{array}{l} (\ell - \gamma)^3 \left[\frac{\ell - \gamma}{2} + (\gamma - \varphi) \right], \quad (\gamma > \varphi) \\ (\ell - \varphi)^3 \left[\frac{\ell - \varphi}{2} + (\varphi - \gamma) \right], \quad (\gamma < \varphi) \end{array} \right\} \quad (5. 3)$$

Nach Einführung der Koordinaten (4. 6), (4. 7) gibt dann (3. 3)

$$\bar{K}(\varphi, \psi) = \frac{3 \varrho \ell^3}{6 E b^2} \cdot \frac{1}{\varphi^{3/2} \psi^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} \psi^3 \left(\varphi - \frac{\psi}{2} \right), \quad (\varphi > \psi) \\ \varphi^3 \left(\psi - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (\varphi < \psi) \end{array} \right\} \quad (5. 4)$$

Somit hat nun die Integralgleichung (3. 2') die Form

$$\bar{Z}(\varphi) = \frac{\lambda}{6} \left[\int_0^\varphi \frac{\psi^{3/2}}{\varphi^{3/2}} \left\{ \varphi - \frac{\psi}{2} \right\} \bar{Z}(\psi) d\psi + \int_\varphi^1 \frac{\varphi^{3/2}}{\psi^{3/2}} \left\{ \psi - \frac{\varphi}{2} \right\} \bar{Z}(\psi) d\psi \right], \quad (5. 5)$$

wobei

$$\lambda = \frac{3 \varrho \ell^4 \omega^2}{E b^2}. \quad (5. 6)$$

Der Integraloperator auf der rechten Seite transformiert die Potenz ψ^n in den Ausdruck:

$$\frac{\varphi^{n+2}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{5}{2}\right) \left(n + \frac{7}{2}\right)} - \frac{\varphi^{5/2}}{12 \left(n - \frac{1}{2}\right)} + \frac{\varphi^{3/2}}{6 \left(n + \frac{1}{2}\right)}. \quad (5. 7)$$

Wählt man

$$A \psi^{3/2} + B \psi^{5/2}$$

als Anfangsfunktion, so lässt sich das Resultat von m Iterationsschritten in der folgenden Form darstellen

$$\bar{Z}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \{ A_j \varphi^{2j-1/2} + B_j \varphi^{2j+1/2} \}. \quad (5. 8)$$

Man postuliert jetzt den Fehler zu

$$\left. \begin{array}{l} \lambda A_m \frac{\varphi^{2m+3/2}}{(2m-1) 2m (2m+2) (2m+3)} \\ + \lambda B_m \frac{\varphi^{2m+5/2}}{2m (2m+1) (2m+3) (2m+4)} \end{array} \right\} \quad (5. 9)$$

und erhält nach Anwendung von (5. 7) aus dem Koeffizientenvergleich der Potenzen von φ

$$A_j = \frac{\lambda^{j-1} 3!}{(2j+1)! (2j-2)!} A_1, \quad B_j = \frac{\lambda^{j-1} 4!}{(2j+2)! (2j-1)!} B_1, \quad (5. 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} -A_1 + \frac{\lambda}{6} \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{2j} + \frac{\lambda}{6} \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{2j+1} = 0, \\ B_1 + \frac{\lambda}{12} \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{2j-1} + \frac{\lambda}{12} \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{2j} = 0. \end{array} \right\} \quad (5. 11)$$

Die Ausdrücke für A_j und B_j (5.10) in (5.11) eingesetzt, ergeben ein homogenes Gleichungssystem in A und B , wobei die ausmultiplizierte Determinante für die nichttriviale Lösung die folgende Form annimmt:

$$\left. \begin{aligned} & -1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+1)!(2j-2)!2j} - 2 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+2)!2j!} \\ & + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+1)!(2j-2)!2j} \sum_{K=1}^m \frac{\lambda^K}{(2K+2)!2K!} \\ & - 2 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+1)!(2j-1)!} \sum_{K=1}^m \frac{\lambda^K}{(2K+2)!(2K-1)!(2K+1)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Nach steigenden Potenzen geordnet, sollen nun die ersten n Glieder mit der Lösung von KIRCHHOFF (5.13)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^j}{(2j+1)![(j+1)!]^2} = 0 \quad (5.13)$$

übereinstimmen. Um dies zu beweisen, ordnet man die Doppelsummen nach Potenzen von λ und zeigt die Identität der $(n+1)$ -ten Potenz von λ in den beiden Ausdrücken (5.12) und (5.13).

$$\begin{aligned} & +1 - \sum_{n=1}^m \frac{\lambda^n}{(2n+2)!2n!} [(2n+2)(2n-1)-2] \\ & - 2 \sum_{n=1}^{m-1} \lambda^{n+1} \sum_{K=1}^n \frac{1}{[2(n-K+1)+2]![2(n-K+1)-1]!(2K+1)!(2K-2)!2K} \\ & + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \lambda^{n+1} \sum_{K=1}^n \frac{1}{[2(n-K+1)+1]![2(n-K+1)-1]!(2K+2)!(2K-1)!(2K+1)} \\ & \equiv \sum_{n=0}^m \frac{\lambda^n (-1)^n}{(2n+1)!(n+1)!(n+1)!}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(2n+4)(2n+1)-2}{(2n+4)!(2n+2)!} \\ & + 2 \sum_{K=1}^n \left\{ \frac{2K-1}{[2(n-K+1)+2]![2(n-K+1)-1]!(2K+1)!(2K-1)!} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2K}{[2(n-K+1)+1]![2(n-K+1)-1]!(2K+2)!(2K+1)!} \right\} \\ & \equiv \frac{(-1)^n}{(2n+3)!(n+2)!(n+2)!}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Nach einigen Umformungen nehmen diese Ausdrücke die folgende Form an:

$$2 \sum_{K=0}^{2n+2} \binom{2n+4}{K} \binom{2n+2}{K} (-1)^K \left(\frac{K-1}{K+1} \right) \equiv (-1)^n \frac{(2n+4)(2j+2)!}{(j+2)!(j+2)!}. \quad (5.16)$$

Setzt man noch $m = n + 1$ und beachtet die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{K=0}^{2m} \binom{2m}{K} \binom{2m+2}{K} (-1)^K &= \binom{2m}{m+1} (-1)^m - (-1)^{m+1} \binom{2m}{m} \\ \sum_{K=0}^{2m} \binom{2m+2}{K} \binom{2m+1}{K} (-1)^K &= (-1)^m \binom{2m+1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

so ergibt sich sofort, dass die geforderte Identität erfüllt ist. Der Fehler (5.9) verschwindet beim Übergang $m \rightarrow \infty$, so dass die Lösung ebenfalls die Form (5.13) annimmt.

Die Krümmung ergibt sich aus den Beziehungen (3.3), (5.8) und (5.10) zu

$$Z(\varphi) = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{K A_1 3! \varphi^{2j-2}}{(2j+1)!(2j-2)!} + \frac{K B_1 4! \varphi^{2j-1}}{(2j+2)!(2j-1)!} \right\} \lambda^{j-1} \quad (5.18)$$

mit

$$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} b^3 E}}. \quad (5.19)$$

Durch Wahl der neuen Variablen

$$\zeta = \varphi \lambda^{1/2}$$

und der neuen Konstanten

$$K A_1 3! = A + B, \quad K B_1 4! \lambda^{-1/2} = A - B \quad (5.20)$$

erhält $Z(\zeta)$ die Form

$$Z(\zeta) = A \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{\zeta^j}{(j+3)! j!} + B \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{\zeta^j (-1)^j}{(j+3)! j!},$$

die mit der Kirchhoffschen Lösung übereinstimmt.

Summary

The vibration problem of certain dynamic systems with polynomial mass and stiffness distributions can be expressed as a Fredholm integral equation with a degenerated, symmetric kernel.

If a starting function is chosen appropriately, the eigenfunction can be expressed as a power series. Simple recurrence relations between the coefficients of this power series yield the characteristic equation for the eigenvalues with a finite number of disposable coefficients.

This method is applied to a beam and a wedge and leads to the exact solutions.

(Eingegangen: 21. Februar 1953.)

Sur la thermodynamique des processus irréversibles

(Troisième mémoire)¹⁾

Par KYRILLE POPOFF, Sofia²⁾

Considérons un système, adiabatiquement isolé, dont l'état est complètement défini par les variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Soient $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ les valeurs de ces variables, correspondant à l'état stable du système, et posons $x_i = \xi_i - \xi_i^0$. L'expression de l'entropie autour de l'état stable, réduite à ses termes du second degré, est donnée par

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k, \quad \text{avec} \quad g_{ik} = g_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

où $\sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k$ est une forme quadratique, positivement définie.

La théorie des processus irréversibles de la thermodynamique, esquissée par ONSAGER, repose sur la symétrie du tenseur L_{ik} , figurant dans les relations phénoménologiques

$$x'_i = \sum_k L_{ik} X_k, \quad (1)$$

où les x'_i sont les «flux», c'est-à-dire les dérivées des x_i par rapport au temps t , et les «forces» X_k , les dérivées de $(-\Delta S)$ par rapport aux x_k respectivement.

Dans ce qui suit, nous montrons:

1° Si les x_i , et par conséquent les g_{ik} , sont d'après l'hypothèse les seuls éléments déterminant l'état du système, les L_{ik} doivent être complètement déterminés par les g_{ik} . L'intégrale générale du système d'équations différentielles (1), qui est d'ordre n , contenant n constantes d'intégration; ces constantes sont complètement définies par les valeurs initiales des n variables x_i , mais pour que ces intégrales déterminent des processus irréversibles, il faut qu'on ait $x_i(+\infty) = 0$, ce qui impose n nouvelles conditions aux L_{ik} .

2° Nous montrons que toutes ces conditions sont remplies par des intégrales du système plus général d'ordre $2n$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad \text{où} \quad X_i = -\frac{\partial(\Delta S)}{\partial x_i}, \quad (2)$$

dans le cas le plus général, les L_{ik} ne dépendant ainsi que des g_{ik} .

¹⁾ Cf. KYRILLE POPOFF, *Sur la thermodynamique des processus irréversibles*, 1^{er} mémoire: ZAMP 3, 42-51 (1952); 2^e mémoire: ZAMP 3, 440-448 (1952); *Sur les relations phénoménologiques d'Onsager*, C. r. Acad. Sci. Paris 253, N° 13, 648-649 (1952); *Sur l'échange de chaleur par conduction d'un système à un autre*, C. r. Acad. Sci. Paris 256, N° 2, 785-786 (1953).

²⁾ Institut de Mathématiques à l'Université de Sofia.

3° Nous appliquons la théorie générale que nous développons à la théorie de la conductibilité de la chaleur et à la théorie des phases.

Etude des relations phénoménologiques d'Onsager

Considérons le système d'équations différentielles

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= L_{11} X_1 + L_{12} X_2 + \cdots + L_{1n} X_n, \\ x'_2 &= L_{21} X_1 + L_{22} X_2 + \cdots + L_{2n} X_n, \\ &\dots\dots\dots \\ x'_n &= L_{n1} X_1 + L_{n2} X_2 + \cdots + L_{nn} X_n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

avec

$$X_k = g_{k1} x_1 + g_{k2} x_2 + \cdots + g_{kn} x_n.$$

C'est un système linéaire d'ordre n dont la solution générale est donnée par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \alpha_1 e^{r_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \alpha_n e^{r_n t}, \\ x_2(t) &= C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \beta_n e^{r_n t}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= C_1 \lambda_1 e^{r_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \lambda_n e^{r_n t}, \end{aligned}$$

où les r_i et les $\alpha_i, \beta_i, \dots, \lambda_i$ sont des fonctions des L_{ik} et des g_{ik} seulement. Les conditions initiales $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ déterminent complètement les n constantes d'intégration C_1, C_2, C_n en fonction des L_{ik} . Mais pour que les équations (1) définissent un processus irréversible, il faut qu'on ait encore $x_1(+\infty) = 0, x_2(+\infty) = 0, \dots, x_n(+\infty) = 0$, ce qui exige que tous les r_i soient négatifs. Or, les r_i étant des fonctions des L_{ik} , cela impose n nouvelles conditions aux L_{ik} . Ainsi, dans le cas de $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{1}{2} (L_{11} g_{11} + 2 L_{12} g_{12} + L_{22} g_{22}) \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(L_{11} g_{11} + 2 L_{12} g_{12} + L_{22} g_{22})^2 - 4 (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}. \end{aligned}$$

On constate d'abord que les L_{ik} entrent comme éléments déterminant le processus irréversible, contrairement à l'hypothèse admise que les ξ_i sont les seules variables déterminant l'état du système. Il faut de plus que les r_i soient tous réels et négatifs pour qu'on ait $x_i(+\infty) = 0$, ce qui impose des nouvelles conditions à remplir par les L_{ik} .

Les équations (2) déterminent complètement un processus irréversible

Considérons maintenant le système d'équations différentielles d'ordre $2n$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (2)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \dots + g_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2x_n}{dt^2} &= g_{n1}x_1 + g_{n2}x_2 + \dots + g_{nn}x_n. \end{aligned} \right\} \qquad (2 \text{ bis})$$

Ces équations admettent des intégrales de la forme

$$x_1(t) = \alpha e^{rt}, \quad x_2 = \beta e^{rt}, \quad \dots, \quad x_n = \lambda e^{rt},$$

où les $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ et r sont déterminés par le système d'équations algébriques

$$\left. \begin{aligned} (g_{11} - r^2)\alpha + g_{12}\beta + \dots + g_{1n}\lambda &= 0, \\ g_{21}\alpha + (g_{22} - r^2)\beta + \dots + g_{2n}\lambda &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ g_{n1}\alpha + g_{n2}\beta + \dots + (g_{nn} - r^2)\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

homogènes par rapport aux $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. Par conséquent, on a pour déterminer r l'équation algébrique suivante :

$$\left| \begin{array}{cccc} g_{11} - r^2 & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & & g_{2n} \\ \dots\dots\dots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & & g_{nn} - r^2 \end{array} \right| = 0, \qquad (4)$$

qui est de degré $2n$. La forme quadratique $\sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k$ étant positivement définie, les n racines (r^2) de cette équation sont toutes positives, ce qui fait que les n racines de cette équation sont négatives et les autres n racines sont positives. Soient r_1, r_2, \dots, r_n les racines négatives et $r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_{2n}$ les racines positives. Dans le cas de $n = 3$, par exemple, on aura pour déterminer r^2

où les A, B, \dots, N comme les $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ne dépendent que des g_{ik} . On a de plus

$$x'_i(t) = C_1 e^{r_1 t} r_1 \eta_1 + C_2 e^{r_2 t} r_2 \eta_2 + \cdots + C_n e^{r_n t} r_n \eta_n. \quad (8)$$

L'élimination des $C_1, e^{r_1 t}, \dots, C_n, e^{r_n t}$ des équations (7) et (8) conduit aux relations phénoménologiques

$$\begin{array}{cccc|c} x'_i & r_1 \eta_1 & r_2 \eta_2 & \dots & r_n \eta_n \\ X_1 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ X_2 & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{array} = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$x'_i = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2 + \dots + L_{in} X_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

et où les L_{ik} comme les $r, \alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des constantes ne dépendant que des g_{ik} .

Etude du cas général où l'on garde tous les termes dans le développement de ΔS

Dans le cas général où l'on garde tous les termes dans le développement de ΔS , il est essentiel de montrer que l'on a n intégrales $x_i(t)$, contenant n constantes, permettant de choisir arbitrairement les valeurs initiales x_i^0 et s'annulant pour $t = +\infty$. En suivant la méthode d'intégration de POINCARÉ, que nous avons employée dans notre second mémoire cité, on peut ramener les équations (2), où cette fois on retient tous les termes dans le développement de (ΔS) , à un système d'équations différentielles d'ordre $2n$ de la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{r_1 u_1 + \dots} &= \frac{du_2}{r_2 u_2 + \dots} = \dots = \frac{du_n}{r_n u_n + \dots} = \frac{du_{n+1}}{r_{n+1} u_{n+1} + \dots} = \dots \\ &= \frac{du_{2n}}{r_{2n} u_{2n} + \dots} = dt \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

où les points (...) remplacent des termes de second degré et de degré supérieur à deux, où les u_i sont des fonctions linéaires des x_i et des x'_i et où les r_i sont les racines de l'équation algébrique (4). Aux racines négatives r_1, r_2, r_n correspondent ici n intégrales $x_i(t)$, fonctions holomorphes de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$, s'annulant pour $t = +\infty$ et contenant n constantes d'intégration et qu'on peut développer suivant les puissances de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$. Avec ces valeurs des $x_i(t)$ on forme les $X_i = -\delta(\Delta S)/\delta X_i$, qui deviennent ainsi des fonctions holomorphes des $e^{r_i t}$.

L'élimination des e^{rit} de $x'_i(t)$ et des X_1, X_2, \dots, X_n conduit ainsi aux relations phénoménologiques. Dans ce cas pourtant les L_{ik} sont des fonctions de t aussi, dont les valeurs principales coïncident avec les valeurs du paragraphe précédent. Pour plus de détails, nous renvoyons au tome III du *Traité d'analyse* de E. PICCARD et à notre second mémoire cité.

Après ces généralités, considérons quelques problèmes physiques concrets.

Transfèrement de la chaleur d'un système à un autre

En appliquant la méthode ici développée nous allons montrer que l'hypothèse de FOURIER concernant le transport de la chaleur d'un système à un autre découle des équations (2).

Considérons un système de deux plaques cylindriques, mises en contact thermique par leurs faces et adiabatiquement isolées du reste par une couche imperméable à la chaleur. Dans ce qui suit, nous négligeons le travail de la dilatation thermique.

Soit m la masse, par unité de surface de contact, T_1 la température absolue, c_1 la chaleur spécifique de la première plaque et m_2, T_2, c_2 les données correspondant à la seconde; T_0 la température du système après l'établissement de l'équilibre thermique. Nous admettons que l'épaisseur des plaques est assez faible pour que la température de chacune reste uniforme pendant le processus. En désignant par q_1 la chaleur à emprunter, par l'unité de surface, au moment t par la première plaque de la seconde pour arriver à l'équilibre thermique et par q_2 la quantité correspondant à la seconde, on aura $q_1 + q_2 = 0$, où

$$q_1 = m_1 c_1 (T_1 - T_0) = m_1 c_1 \Delta T_1, \quad q_2 = m_2 c_2 (T_2 - T_0) = m_2 c_2 \Delta T_2, \quad (11)$$

d'où l'on tire

$$m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 = T_0 (m_1 c_1 + m_2 c_2) \quad (12)$$

et

$$q_1 = \frac{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} (T_1 - T_2). \quad (13)$$

On aura ainsi pour ΔS , correspondant à un moment donné t et à l'unité de surface de contact thermique, en ne retenant que des termes du second degré,

$$\Delta S = \frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} = - \frac{T_1 - T_2}{T_0^2} q_1,$$

ce qu'on peut écrire, eu égard à la formule (13),

$$\Delta S = - \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \cdot \frac{q_1^2}{T_0^2},$$

d'où l'on tire

$$-\frac{\partial(\Delta S)}{\partial q_1} = \frac{2}{T_0^2} \cdot \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} q_1 = a q_1, \quad \text{avec } a > 0,$$

et, par conséquent, on aura ici l'équation unique

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = a q_1, \quad (14)$$

dont l'intégrale est de la forme $q_1 = C e^{rt}$.

En posant cette valeur de q_1 dans (14), on aura, a étant positif,

$$r^2 = a, \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{a},$$

la valeur $-\sqrt{a}$ correspondant seulement au problème physique, q_1 devant tendre vers zéro pour $t = +\infty$.

On a ainsi

$$q_1 = C e^{rt} = C e^{-\sqrt{a}t}, \quad \dot{q}_1 = -\sqrt{a} C e^{-\sqrt{a}t} = -\sqrt{a} q_1, \quad (15)$$

avec $C = q_1^0$ — la valeur de q_1 pour un moment donné $t = t_0$.

Avec la valeur de q_1 de (13) et de a , on obtient l'expression suivante du «flux» de chaleur, correspondant à l'hypothèse de FOURIER

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{2 m_1 c_1 \cdot m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}} (T_1 - T_2). \quad (16)$$

Jusqu'ici nous avons supposé qu'à chaque moment la température des plaques est uniforme. Mais quoique très minces, la température des plaques, qui est une fonction continue le long des axes des plaques, différera sur les deux faces de chacune des plaques, et on aura des valeurs différentes de l'entropie suivant qu'on forme l'expression de l'entropie avec l'une ou avec l'autre de ces températures dont la différence est petite de l'ordre de l'épaisseur des plaques. La valeur de l'entropie de chaque plaque correspondra à une température moyenne, dépendant de la conductibilité des plaques. Si l'on désigne par T_1 et T_2 les températures extrêmes sur les deux plaques, T_0 la température à l'état de stabilité et en posant $\Delta T_1 = T_1 - T_0$, $\Delta T_2 = T_2 - T_0$, les températures moyennes à mettre dans l'expression de ΔS seront

$$T_0 + \lambda_1 \Delta T_1, \quad T_0 + \lambda_2 \Delta T_2,$$

où λ_1 et λ_2 dépendent de la conductibilité des plaques et diffèrent très peu de l'unité. Ainsi on aura

$$q_1 = m_1 c_1 \lambda_1 \Delta T_1, \quad q_2 = m_2 c_2 \lambda_2 \Delta T_2, \quad q_1 + q_2 = 0. \quad (17)$$

Avec ces valeurs de q_1 et q_2 on aura

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{m_1 c_1 \lambda_1 \cdot m_2 c_2 \lambda_2}{m_1 c_1 \lambda_1 + m_2 c_2 \lambda_2} (T_1 - T_2), \quad \frac{q_1}{m_1 c_1} = \lambda_1 \Delta T_1, \\ \frac{q_2}{m_2 c_2} &= \lambda_2 \Delta T_2 = -\frac{q_1}{m_2 c_2}, \quad \lambda_2 \Delta T_2 - \lambda_1 \Delta T_1 = -q_1 \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

et en se bornant aux termes de second degré

$$\Delta S = \frac{q_1}{T_0 + \lambda_1 \Delta T_1} + \frac{q_2}{T_0 + \lambda_2 \Delta T_2} = \frac{\lambda_2 \Delta T_2 - \lambda_1 \Delta T_1}{T_0^2} q_1 = -\frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \cdot \frac{q_1^2}{T_0^2}$$

d'où

$$\frac{d(-\Delta S)}{dq_1} = -\frac{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \cdot \frac{q_1}{T_0^2} = -a q_1.$$

En suivant les calculs de la page précédente, on aura définitivement

$$\dot{q}_1 = -\sqrt{\frac{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2}} \cdot \frac{m_1 c_1 \lambda_1 \cdot m_2 c_2 \lambda_2}{m_1 c_1 \lambda_1 + m_2 c_2 \lambda_2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_0}.$$

Conduction de la chaleur dans une barre homogène

Considérons une barre cylindrique de densité ρ et de chaleur spécifique c mise dans un étui imperméable à la chaleur, éventuellement ouvert même de deux côtés. Nous admettons que la température de la barre est une fonction continue de l'abscisse x , comptée sur l'axe de la barre, et admet des dérivées. Considérons trois sections de la barre, correspondant à $x - dx$, x et à $x + dx$ et soit f l'aire de ces sections que nous supposons égale à $u n$. On a ainsi deux tranches limitrophes de volume $f dx$ et de masse $\rho f dx$.

Considérons le système des deux tranches. Soit $\dot{q}(x - dx)$ le flux de chaleur pénétrant le système par la section $(x - dx)$ et $q(x + dx)$ le flux de chaleur sortant par la section $(x + dx)$, rapportés à l'unité de surface.

Désignons par ds l'accroissement de l'entropie de l'unité de masse du système des deux tranches pendant l'intervalle de temps dt . On aura pour l'accroissement de l'entropie du système, rapporté à l'unité de temps

$$2 \rho f dx \frac{ds}{dt}.$$

Désignons d'autre part par du l'accroissement de l'énergie interne, rapporté à l'unité de masse pendant l'intervalle de temps dt . On aura pour l'accroissement de l'énergie interne du système pendant l'unité de temps

$$2 \rho f dx \frac{du}{dt} = f [\dot{q}(x - dx) - \dot{q}(x + dx)] = -2 f dx \frac{d\dot{q}(x)}{dx}.$$

Ainsi, en négligeant le travail de la dilatation thermique, on aura

$$T \varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{d\dot{q}(x)}{dx},$$

ou bien

$$\varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{1}{T} \cdot \frac{d\dot{q}}{dx} = - \frac{d(\dot{q}/T)}{dx} - \frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \frac{dT(x)}{dx}.$$

Pourtant on a

$$T(x + dx) - T(x - dx) = 2 \frac{dT(x)}{dx} dx.$$

Or, d'après la formule (13), cette quantité est proportionnelle à la quantité de chaleur q dans un processus adiabatique. En posant

$$\frac{dT}{dx} = \mu q,$$

μ étant le coefficient de proportionnalité figurant dans (13) ou (18), on aura

$$\varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{d(\dot{q}/T)}{dx} - \frac{\mu q \dot{q}}{T^2}.$$

Ainsi l'accroissement de l'entropie se trouve décomposé en deux parties:
1° à la divergence de l'entropie

$$- \frac{d(\dot{q}/T)}{dx}$$

et 2° à une partie

$$\Delta \dot{\sigma} = - \frac{\mu}{T^2} q \dot{q}$$

correspondant à

$$\Delta \sigma = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{T^2} q^2$$

et provenant d'une source, due à un processus adiabatique irréversible, considéré dans le paragraphe précédent. La dérivée par rapport à q de cette partie étant $(-\mu q/T^2)$, on aura pour déterminer q , d'après la théorie développée ici

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = b q \quad \text{avec} \quad b = \frac{\mu}{T^2}$$

et qui conduit, d'après le paragraphe précédent, à

$$\dot{q} = - \sqrt{b} q = - \sqrt{\frac{1}{b}} \cdot \frac{dT}{dx}.$$

C'est la formule du flux de chaleur, d'après l'hypothèse de FOURIER. Dans son ouvrage *Thermodynamics of Irreversible Processes*, M. DE GROOT reproduit le résultat analogue, dû à M. PRIGOGINE et obtenu par l'application directe des relations phénoménologiques d'ONSAGER, dans leur forme primitive où figurent les coefficients L_{ik} , dont la signification est, comme nous l'avons montré, à établir pour qu'on ait $q(+\infty) = 0$.

Applications à la théorie des phases

Considérons un récipient de parois imperméables à la chaleur et absolument rigides, rempli d'un liquide (I) et de ses vapeurs (II) à des températures respectives T_1 et T_2 . Soient M , V , U la masse totale, le volume et l'énergie totale de la substance, remplissant le récipient. En désignant par M_i ($i = 1, 2$) les masses respectives des deux composants, par v_i , u_i et s_i le volume, l'énergie et l'entropie respectifs, rapportés à l'unité de masse des composants, on aura

$$\left. \begin{aligned} M_1 + M_2 &= M, & M_1 v_1 + M_2 v_2 &= V, & M_1 u_1 + M_2 u_2 &= U, \\ S &= M_1 s_1 + M_2 s_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Choisissons l'énergie et le volume comme variables indépendantes déterminant l'état des composants. Les relations (20) déterminent M_2 , v_2 , u_2 en fonction de M_1 , v_1 , u_1 . D'autre part s_i , T_i , p_i , étant des fonctions de u_i , v_i , deviennent des fonctions de M_1 , v_1 , u_1 . En définitive, l'entropie totale S du système sera une fonction déterminée de M_1 , v_1 et u_1 . En désignant par u_1^0 , v_1^0 , M_1^0 les valeurs de ces variables à l'état d'équilibre thermodynamique, on aura, en posant

$$v_1 - v_1^0 = v, \quad u_1 - u_1^0 = u, \quad M_1 - M_1^0 = m,$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(u_1, v_1, M_1) - S(u_1^0, v_1^0, M_1^0) = \left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \right)_0 u + \left(\frac{\partial S}{\partial v_1} \right)_0 v + \left(\frac{\partial S}{\partial M_1} \right)_0 m \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 u v + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Les dérivées partielles étant prises pour les valeurs u_1^0 , v_1^0 , M_1^0 des variables indépendantes, correspondant au maximum de S , on aura

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial v_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial M_1} \right)_0 = 0 \quad (21)$$

et en ne retenant que les termes du second degré en u , v , m

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 u v + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m^2 \right]. \end{aligned}$$

Pour le calcul des dérivées secondes, nous aurons recours à l'expression de la différentielle seconde

$$d^2S = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} du dv + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} dM_1^2.$$

Les équations différentielles, correspondant aux équations (2), sont dans le cas

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 m, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 m, \\ \frac{d^2 m}{dt^2} &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

dont la solution qui nous intéresse dépend des racines négatives de l'équation en r suivante:

$$\begin{vmatrix} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 - r^2 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 \\ - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 - r^2 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 \\ - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 - r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

—(ΔS) étant une forme positivement définie, trois des racines de cette équation en r sont négatives et les trois autres positives. Les constantes d'intégration dans l'intégrale générale du système (22), correspondant aux racines positives, doivent être posées nulles.

Les résultats qu'on obtient ainsi correspondent au problème physique tant que la masse d'un des composants, donnée par les équations (21), n'est pas négative ou plus grande que M .

Pour déterminer les valeurs des variables indépendantes correspondant à l'état d'équilibre thermodynamique nous suivons la méthode de GIBBS, telle qu'elle a été exposée par MAX PLANCK¹⁾.

Des équations (20), on obtient

$$\left. \begin{aligned} dM_2 &= -dM_1, \quad M_2 dv_2 = -M_1 dv_1 - (v_1 - v_2) dM_1, \\ M_2 du_2 &= -M_1 du_1 - (u_1 - u_2) dM_1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹⁾ MAX PLANCK, *Thermodynamik*, 9e éd. (W. de Gruyter, Berlin et Leipzig 1930).

et

$$\left. \begin{aligned}
 dS &= M_1 ds_1 + M_2 ds_2 + s_1 dM_1 + s_2 dM_2, \quad (dM = dm) \\
 &= M_1 ds_1 + M_2 ds_2 + (s_1 - s_2) dM \\
 &= M_1 \frac{du_1 + p_1 dv_1}{T_1} + M_1 \frac{du_2 + p_2 dv_2}{T_2} + (s_1 - s_2) dm \\
 &= M_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) du_1 + M_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dv_1 \\
 &\quad + \left(s_1 - s_2 - \frac{(u_1 - u_2) + p_2 (v_1 - v_2)}{T_2} \right) dm.
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ainsi les équations (21) définissant l'état d'équilibre, deviennent

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial u} &= M_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial v} = M_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 0, \\
 \frac{\partial S}{\partial M_1} &= s_1 - s_2 - \frac{(u_1 - u_2) + p_2 (v_1 - v_2)}{T_2} = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

d'où l'on tire les conditions de GIBBS

$$T_1 = T_2 = T_0, \quad p_1 = p_2 = p_0. \quad (27)$$

D'autre part, u et v ayant été choisis comme variables indépendantes, on aura

$$\begin{aligned}
 T_1 &= f_1(u_1, v_1), \quad T_2 = f_2(u_2, v_2) = f(u_1, v_1, M_1), \\
 p_1 &= \varphi_1(u_1, v_1), \quad p_2 = \varphi_2(u_2, v_2) = \varphi(u_1, v_1, M_1), \\
 s_1 &= \psi_1(u_1, v_1), \quad s_2 = \psi_2(u_2, v_2) = \psi(u_1, v_1, M_1)
 \end{aligned}$$

et les trois équations déterminent les trois variables v_1, u_1, M_1 qui correspondent à l'état d'équilibre thermodynamique. Il est à remarquer que les équations (26) contiennent s et u par la différence de leur valeurs à l'état (I) et à l'état (II).

En suivant MAX PLANCK, on peut donner une autre forme à la dernière des équations (26). La différence $(s_1 - s_2)$ à l'état d'équilibre thermodynamique ne dépendant que de l'état (I) et de l'état (II) est indépendante du chemin suivi dans le passage de l'état (I) à l'état (II). On peut trouver cette différence en suivant le passage sur l'isotherme T_0 . On aura ainsi, s_1 et s_2 se rapportant à l'unité de masse de la même substance et à la température T_0 ,

$$s_1 - s_2 = \int_{(\text{II})}^{(\text{I})} ds = \int_{\text{II}}^{\text{I}} \frac{du + p dv}{T_0} = \frac{u_1 - u_2}{T_0} + \frac{1}{T_0} \int_{(\text{II})}^{(\text{I})} p dv.$$

Avec cela, en posant $T_2 = T_0$, la dernière des équations (26) devient

$$\frac{1}{T_0} \int_{II}^I p \, dv - \frac{p_2(v_1 - v_2)}{T_0} = 0, \quad \int_{II}^I p \, dv = p_2(v_1 - v_2).$$

Il nous reste à former les dérivées secondes, figurant dans les équations (22), au moyen des quantités mesurables directement.

De (25), on obtient, eu égard aux relations (21)

$$\begin{aligned} d^2S &= \frac{M_1}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) du_1 + \frac{M_1 p_0}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) dv_1 + \frac{M_1}{T_0} (dp_1 - dp_2) dv_1 \\ &\quad + \left[ds_1 - ds_2 - \frac{du_1 - du_2 + p_0 (dv_1 - dv_2)}{T_0} - \frac{(v_1 - v_2) p_2}{T_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2)}{T_0^2} dT_2 \right] dM_1 \\ &= \frac{M_1}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) du_1 + \frac{M_1 p_0}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) dv_1 + \frac{M_1}{T_0} (dp_1 - dp_2) dv_1 \\ &\quad + \left[\frac{u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2)}{T_0^2} dT_2 - \frac{v_1 - v_2}{T_0} dp_2 \right] dM_1. \end{aligned}$$

Les u_1, v_1, u_2, v_2 et M_1 qui figurent dans cette expression de d^2S correspondent à l'état d'équilibre. Les différentielles $dT_1, dT_2, du_2, dv_2, dp_1, dp_2$ d'autre part doivent être exprimées en fonction de du_1, dv_1 et de $dM_1 = dm$.

Nous avons eu d'abord

$$M_2 dv_2 = -M_1 dv_1 = (v_1 - v_2) dm, \quad \text{avec} \quad M_2 = M - M_1,$$

u et v ayant été choisis comme variables indépendantes, on aura $T = T(u, v)$. Cette relation détermine u comme fonction de T et de v , soit $u = u(v, T)$, satisfaisant identiquement l'équation $T = T[u(v, T), v]$, d'où l'on tire d'abord en prenant les dérivées des deux membres suivant T

$$1 = \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(v, T)}{\partial T}, \quad \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{\partial u(v, T)/\partial T} = \frac{1}{c_u}.$$

En différenciant la même identité suivant v , on obtient

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} = - \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(v, T)}{\partial v} = - \frac{1}{c_v} \cdot \frac{\partial u(v, T)}{\partial v}.$$

D'autre part, on a d'après le premier principe de la thermodynamique

$$\begin{aligned} dq &= du(v, T) + p(v, T) dv = \frac{\partial u(v, T)}{\partial T} dT + \left[\frac{\partial u(v, T)}{\partial v} + p(v, T) \right] dv \\ &= c_v dT + a dv, \quad \text{avec} \quad a = \frac{\partial u(v, T)}{\partial v} + p(v, T), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} = -\frac{1}{c_v} (a - p).$$

Définitivement, on aura

$$dT = \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial T(u, v)}{\partial v} dv = -\frac{a - p}{c_v} dv + \frac{1}{c_v} du,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} dT_1 &= -\frac{a_1 - p_0}{c_{v1}} dv_1 + \frac{1}{c_{v1}} du_1, \\ dT_2 &= -\frac{a_2 - p_0}{c_{v2}} dv_2 + \frac{1}{c_{v2}} du_2 \\ &= \frac{a_2 - p_0}{c_{v2}} \cdot \frac{M_1}{M_2} dv_1 - \frac{1}{c_{v2}} \cdot \frac{M_1}{M_2} du_1 \\ &\quad + [(a_2 - p_0)(v_1 - v_2) - (u_1 - u_2)] \cdot \frac{dm}{c_{v2} M_2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir dp en fonction de du et dv , considérons p comme fonction de u et de v . On aura ainsi

$$dp(u, v) = \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} dv.$$

D'autre part, on a d'après le premier principe de la thermodynamique

$$dq = du(p, T) + p dv(p, T) = k dp + c_p dT$$

où l'on a

$$k = \frac{\partial u(p, T)}{\partial p} + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial p}, \quad c_p = \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}.$$

En portant dans l'expression de $p(u, v)$ en fonction de u, v les valeurs de u et v en fonction de p et T , on aura

$$p = p(u, v) = p[u(p, T), v(p, T)],$$

d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(p, T)}{\partial p} + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(p, T)}{\partial p}, \\ 0 &= \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

D'ici, en tenant compte des expressions de k et de c_p et en posant

$$\Delta = k \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} - c_p \frac{\partial v(p, T)}{\partial p},$$

on obtient

$$\Delta \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} = - \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} = p \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} - c_p, \quad \Delta \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}$$

d'où

$$dp = \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} dv = \frac{\partial v(p, T)/\partial T}{\Delta} du + \frac{p [\partial v(p, T)/\partial T] - c_p}{\Delta} dv.$$

On aura ainsi

$$dp_1 = \left(\frac{\partial v(p, T)/\partial T}{\Delta} \right)_1 du_1 - \left(\frac{c_p - p [\partial v(p, T)/\partial T]}{\Delta} \right)_1 dv_1,$$

et en tenant compte des expressions de du_2 et dv_2

$$dp_2 = - \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\partial v(p, T)/\partial T}{\Delta} \right)_2 du_1 + \left(\frac{c_p - p [\partial v(p, T)/\partial T]}{\Delta} \right)_2 dv_1 \\ - \frac{1}{M_2 \Delta_2} \left\{ [u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_0)] \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} - c_p (v_1 - v_2) \right\}_2 dm,$$

les indices 1 et 2 se rapportant aux phases (I) et (II) à l'état d'équilibre.

De l'équation $dq = du + p dv$, on obtient pour la quantité de chaleur ($q_1 - q_2$) nécessaire pour faire passer l'unité de masse de la substance de température T_0 et sous pression p_0 de l'état I à l'état II,

$$q_1 - q_2 = u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2).$$

Ces valeurs des dT et des dp introduites dans l'expression (28) de d^2S conduisent, après réductions faciles, à une expression de la forme

$$d^2S = A du_1^2 + 2 B du_1 dv_1 + 2 C du_1 dm + D dv_1^2 + 2 E dv_1 dm + F dm^2$$

dont les coefficients sont les dérivées secondes respectives figurant dans les seconds membres du système d'équations différentielles (22). Nous nous dispensons à reproduire ici les expressions de ces coefficients. Nous nous contentons de remarquer qu'ils sont formés tous avec des quantités qu'on peut obtenir par des mesures directes. On aura ainsi le système d'équations linéaires d'ordre 6

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A u - B v - C m, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = -B u - D v - E m,$$

$$\frac{d^2m}{dt^2} = -C u - E v - F m,$$

dont l'intégration ne présente pas de difficultés. Les intégrales cherchées correspondent aux trois racines négatives de l'équation algébrique de degré 6 en r .

Zusammenfassung

In zwei früheren Abhandlungen haben wir uns mit den phänomenologischen Relationen

$$\dot{x}'_i = \sum_k L_{ik} X_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

beschäftigt, wo x'_i die « Ströme » und X_k die « Kräfte », das heisst die Ableitungen von x_i in bezug auf die Zeit t bzw. die partiellen Ableitungen von $(-\Delta S)$ in bezug auf x_k bedeuten und wo (ΔS) der Ausdruck der Entropie in der Nähe des Stabilitätszustandes eines adiabatischen Systems ist.

Für $n = 2$ haben wir gezeigt, dass die phänomenologische Relation (1) ein System erster Integrale von dem Gleichungssystem

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

ist.

Hier betrachten wir den Fall, wo n irgendeine ganze positive Zahl bedeutet, und zeigen in dem Falle, wo (ΔS) der reduzierte Ausdruck

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

der Entropie bedeutet, dass die Lösung des Systems (1), das ein lineares System n -ter Ordnung ist, nur n Integrationskonstanten enthält, welche die Anfangswerte von $x_i(t)$ willkürlich zu wählen gestatten. Nun müssen aber die Werte von

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n k_j e^{r_j t},$$

für $t = +\infty$, gleich Null sein, und folglich müssen alle n Werte von r_j negativ sein. Da die r_j Funktionen der L_{ik} sind, so erscheinen die L_{ik} als Elemente, die den Charakter des irreversiblen Prozesses bestimmen und n neue Bedingungen ergeben, was der Grundannahme widerspricht, dass die x_i die einzigen unabhängigen Variablen sind, die den Zustand des Systems bestimmen.

Im Gegensatz jedoch zu dem ist die Lösung des Gleichungssystems $(2n)$ -ter Ordnung (2) von der Gestalt:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{2n} C_j \eta_j e^{r_j t}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (3)$$

wo nun die r_j die $2n$ Wurzeln der säkularen Gleichung $(2n)$ -ten Grades

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

sind und nur von den g_{in} abhängen. Da $\sum g_{ik} x_i x_k$ eine positiv definite quadratische Form ist, sind alle Wurzeln reell: n positiv und r negativ. Setzt man nun alle C_j , die den positiven Wurzeln entsprechen, gleich Null, so bekommt man eine Lösung $x_i(t)$, die nur n Integrationskonstanten enthält, welche gestatten, die Anfangswerte x_i^0 willkürlich zu wählen, ausserdem ist hier $x_i(+\infty) = 0$.

Die Elimination der $C_j e^{r_j t}$ aus $x_i(t)$ und aus den mit (3) gebildeten Werten von X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) führt zu den phänomenologischen Relationen (1), wobei die L_{ik} konstante Grössen sind, die nur von den g_{ik} abhängen.

Es wird weiter gezeigt, dass auch in dem Falle, wo (ΔS) alle Potenzen der x_i enthält, die phänomenologischen Relationen (1) eine Folge von (2) sind, wo nun die L_{ik} auch von t abhängige Glieder enthalten.

Von diesem Standpunkt aus sind die Fourier-Formeln für den Wärmeaustausch abgeleitet und die Gleichungen (2) auf die Phasentheorie (zwei Komponenten) angewendet.

Reçu le 20 février 1953.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Note on Two-Dimensional Indentation Problems of a Non-Isotropic Semi-Infinite Elastic Medium

By BIBHUTIBHUSAN SEN, Chandernagore, India

Introduction

Rectangular indentation on the boundary of a semi-infinite isotropic solid was considered by SADOWSKY (1928), and indentations of various shapes for such solids were discussed by SNEDDON (1951) who obtained the result in each case by solving dual integral equations. It was, however, shown by the author (SEN, 1946) that in cases of rigid punches on the straight edge of an isotropic semi-infinite plate, the solutions could be easily obtained by proper choice of complex functions in terms of which the stresses and displacements were expressed. In this paper, this particular method has been applied to solve the problem of an approximately circular indentation on the straight boundary of a semi-infinite plate having a simple form of aeolotropy. The extension of the method to other forms of indentations and more general types of aeolotropy is not difficult.

1. Stress-Strain Relations and the Expression for the Stress Function

Let the origin be taken on the straight edge along which the axis of x is taken. The axis of y is drawn into the plate perpendicular to the edge. In the material considered we take

$$\left. \begin{aligned} E_1, E_2 &= \text{YOUNG'S moduli in } x \text{ and } y \text{ directions respectively,} \\ \sigma_1 &= \text{Ratio of the contraction parallel to } x\text{-axis to the extension parallel to } y\text{-axis,} \\ \sigma_2 &= \text{Ratio of the contraction parallel to } y\text{-axis to the extension parallel to } x\text{-axis,} \\ \mu &= \text{Modulus of rigidity associated with the directions of } x \text{ and } y. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

We further assume that

$$\frac{\sigma_1}{E_2} = \frac{\sigma_2}{E_1} = k, \quad (1.2)$$

say, a relation which holds good in a material like wood.

The stress-strain relations are

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= E^{-1} \widehat{x} \widehat{x} - k \widehat{y} \widehat{y}, \\ e_{yy} &= -k \widehat{x} \widehat{x} + E_2^{-1} \widehat{y} \widehat{y}, \\ e_{xy} &= \mu^{-1} \widehat{x} \widehat{y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Equations of equilibrium in the absence of body forces are satisfied if we write

$$\widehat{x} \widehat{x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \widehat{y} \widehat{y} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \widehat{x} \widehat{y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (1.4)$$

From the relations (1.3), (1.4), and the compatibility equation

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (1.5)$$

we obtain the equation satisfied by χ as

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2M \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial \eta^4} = 0 \quad (1.6)$$

in which

$$2M = (E_1 E_2)^{1/2} [\mu^{-1} - 2k], \quad \eta = \varepsilon y, \quad \varepsilon = [E_1 E_2^{-1}]^{1/4}. \quad (1.7)$$

Hence we can write

$$\chi = \text{Re}[F_1(x + i\alpha\eta) + F_2(x + i\beta\eta)], \quad (1.8)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} &= \text{real part}, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \alpha &= [M + (M^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}, \quad \beta = [M - (M^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Finally putting

$$\gamma_1 = \alpha \varepsilon \quad \text{and} \quad \gamma_2 = \beta \varepsilon, \quad (1.10)$$

we get

$$\chi = \text{Re}[F_1(x + i\gamma_1 y) + F_2(x + i\gamma_2 y)]. \quad (1.11)$$

By using the relations (1.4) expressions for the stresses can now be deduced from the above result¹⁾.

2. Method of Solution

In the particular type of problems under consideration, we shall have $\widehat{x} \widehat{y} = 0$ when $y = 0$. Hence assuming

$$\chi = \text{Re}[\gamma_2 F(x + i\gamma_1 y) - \gamma_1 F(x + i\gamma_2 y)], \quad (2.1)$$

we can write (cf. SEN, 1939)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{x} \widehat{y} &= \text{Re}[i\gamma_1 \gamma_2 \{F''(z_2) - F''(z_1)\}], \\ \widehat{y} \widehat{y} &= \text{Re}[\gamma_2 F''(z_1) - \gamma_1 F''(z_2)], \\ \widehat{x} \widehat{x} &= \text{Re}[\gamma_1 \gamma_2^2 F''(z_2) - \gamma_2 \gamma_1^2 F''(z_1)], \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

¹⁾ For materials like wood which we have considered here, γ_1 and γ_2 will be real positive quantities.

where dashes denote differentiation with respect to arguments, and

$$z_1 = x + i \gamma_1 y \quad \text{and} \quad z_2 = x + i \gamma_2 y. \quad (2.3)$$

Neglecting the rigid body displacements, we have the components of displacements in the x and y directions as

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{Re} [-(\gamma_1^2 E_1^{-1} + k) \gamma_2 F'(z_1) + (\gamma_2^2 E_1^{-1} + k) \gamma_1 F'(z_2)], \\ v &= \operatorname{Re} [i (\gamma_1 \gamma_2)^{-1} \{ (k \gamma_2^2 + E_2^{-1}) \gamma_1^2 F'(z_2) - (k \gamma_1^2 + E_2^{-1}) \gamma_2^2 F'(z_1) \}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

For indentation problems, boundary conditions to be satisfied along $y = 0$ are

$$\widehat{x}y = 0, \quad \widehat{y}y = 0 \quad (|x| > a), \quad v = v_0(x) \quad (|x| < a). \quad (2.5)$$

Moreover stresses should vanish at an infinite distance from the boundary. Putting $z = x + i y$, it is found that the problem reduces to the determination of an analytic function $F'(z)$ of z such that

$$\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} [\operatorname{Re}\{i F'(z)\}]_{y=0} = v_0(x), \quad |x| < a \quad (2.6)$$

and

$$(\gamma_2 - \gamma_1) [\operatorname{Re} F''(z)]_{y=0} = 0, \quad |x| > a. \quad (2.7)$$

If the forms of $F'(z)$ and $F''(z)$ are known, corresponding functions of z_1 and z_2 can be written down by mere substitution, and the expressions for the components of stress and displacement can be easily deduced.

3. Approximately Circular Indentation by a Rigid Punch on the Boundary

Let

$$(\gamma_2 - \gamma_1) F''(z) = -\frac{2P}{\pi a^2} [\sqrt{a^2 - z^2} + i z], \quad (3.1)$$

Then

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{y}y)_{y=0} &= (\gamma_2 - \gamma_1) [\operatorname{Re} F''(z)]_{y=0} \\ &= -\frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad |x| < a, \\ &= 0 \quad |x| > a. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

The total load on the pressed portion is of magnitude

$$\frac{2P}{\pi a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = P. \quad (3.3)$$

By integration, we have from (3.1),

$$(\gamma_2 - \gamma_1) F'(z) = -\frac{P}{\pi a^2} \left[z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a} + i z^2 \right] + \text{const},$$

so that

$$\left. \begin{aligned} v_0(x) &= \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} (\operatorname{Re}\{i F'(z)\})_{y=0} \\ &= -\frac{P}{\pi a^2} \cdot \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} x^2 + C, \quad \text{when } |x| < a. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Assuming that $v_0(x) = 0$ when $x = \pm a$ we shall have

$$v_0(x) = \frac{P}{\pi a^2} \cdot \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} (a^2 - x^2). \quad (3.5)$$

For the value of $F''(z)$ assumed in (3.1) all stress components will tend to zero as $y \rightarrow \infty$. The boundary curve of the indentation will be circular since the curvature

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \text{a constant quantity.}$$

REFERENCES

- M. SADOWSKY, *Z. angew. Math. Mech.* 8, 107 (1928).
 B. SEN, *Bull. Calcutta math. Soc.* 38, 117 (1946).
 B. SEN, *Philos. Mag.* [7] 27, 596 (1939).
 I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1951), Art. 49.

Zusammenfassung

Es wird ein Lösungsverfahren besprochen für das Problem der elastischen, längs ihres Randes durch einen starren Stempel belasteten Halbebene. Die Methode wird für einen einfachen Fall von Anisotropie am Beispiel eines Stempels mit annähernd kreisbogenförmigem Rand illustriert.

(Received: August 17, 1953.)

Ein Oszillationssatz für algebraische Eigenwertprobleme

VON FRANK WILLIAM SINDEN, Zürich¹⁾

Die vorliegende Mitteilung befasst sich mit dem Problem, die Oszillationssätze, wie sie für Differentialgleichungs-Eigenwertaufgaben gelten, sinngemäss auf gewisse algebraische Näherungsprobleme zu übertragen. Die Näherung wird nach Art der Differenzenrechnung vorgenommen. Die Komponenten des Näherungsvektors sollen also eine Tabelle der entsprechenden Funktion darstellen. An Stelle von Aussagen über die Anzahl der Nullstellen einer Eigenfunktion treten Aussagen über die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge der Komponenten eines Eigenvektors.

Definition. Eine Matrix A heisst *variationsvermindernd*²⁾, wenn für jeden Vektor x der transformierte Vektor $\eta = Ax$ immer weniger oder gleich viele Zeichenwechsel wie x selbst aufweist.

Hauptsatz. Man betrachte das Eigenwertproblem

$$Ax = \mu Dx, \quad (1)$$

wo D eine positive Diagonalmatrix ist (alle $d_{ii} > 0$) und wo A symmetrisch und

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ I. SCHOENBERG, Über variationsvermindernde lineare Transformationen, *Math. Z.* 32, 321 (1930).

positiv definit ist. A sei noch variationsvermindernd, und alle ihre kodiagonalen Elemente $a_{i,i+1}$, $a_{i,i-1}$ seien verschieden von Null. Es gilt dann für die charakteristischen Zahlen:

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > 0.$$

Sind die Eigenvektoren nach der entsprechenden Reihenfolge geordnet, so hat der k -te Eigenvektor genau $k-1$ Zeichenwechsel.

Zusatz. Ist A variationsvermehrend und gelten alle übrigen Voraussetzungen des Satzes, so hat der k -te Eigenvektor genau $n-k$ Zeichenwechsel.

Da die Eigenschaft «variationsvermindernd» im Grunde genommen allgemeiner Art ist, scheint die Vermutung plausibel, dass dieser Satz auch auf Integralgleichungen verallgemeinert werden könnte. Eine solche Verallgemeinerung wird jedoch in dieser Arbeit nicht unternommen.

Mit Hilfe der Tatsache, dass die Folge

$$a_1 y_1, a_2 (y_2 - y_1), a_3 (y_3 - y_2), \dots, a_n (y_n - y_{n-1}), -a_{n+1} y_n$$

(sämtliche $a_i > 0$) immer mehr Zeichenwechsel als die Folge y_1, y_2, \dots, y_n aufweist¹⁾, kann man durch Iteration und durch Wahl von geeigneten vorzuschreibenden «Randbedingungen» allgemeinere Differenzenoperatoren konstruieren, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Als Beispiel betrachte man das Eigenwertproblem des transversal schwingenden, inhomogenen Stabes. Im Inneren eines Grundintervalls (a, b) gelte

$$(p y'')'' = \lambda q y, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0,$$

und an jedem Ende seien genau zwei von den vier Funktionen $y, y', p y'', (p y'')'$ gleich Null. Ist dieses Problem auch noch selbstadjungiert und positiv definit, so kann man es nach der eben angedeuteten Methode durch ein Differenzeigenwertproblem approximieren, welches ein oszillatorisches Eigenvektorensystem besitzt.

Ist eine Matrix A variationsvermindernd, so ist die Matrix A^* , die man aus A durch Multiplikation aller geradzahigen Zeilen und aller geradzahigen Spalten mit (-1) erhält, variationsvermehrend. A und A^* besitzen dieselben charakteristischen Zahlen. Diese «Schachbrett-Transformation» kann zum Beweis des Satzes und zur Herstellung weiterer Beispiele benutzt werden.

Zur numerischen Berechnung von Eigenwerten stehen verschiedene «Einschlussätze» zur Verfügung. Diese geben Schranken an, die mindestens einen Eigenwert eingrenzen. Es wird jedoch nichts darüber ausgesagt, der wievielte Eigenwert durch diese Schranken eingegrenzt ist. Der folgende Satz, der eine Modifikation des Collatzschen Einschlussungssatzes²⁾ darstellt, liefert im Gegensatz dazu Schranken für einen bestimmten, durch seine Nummer gekennzeichneten Eigenwert.

Für das Eigenwertproblem (1) seien die Voraussetzungen des Hauptsatzes bzw. des Satzes gültig. Der Versuchsvektor $u = (u_1, \dots, u_n)$ habe genau $k-1$ bzw. $n-k$ Zeichenwechsel. Aus u und dem transformierten Vektor

$$v = A u = (v_1, \dots, v_n)$$

¹⁾ G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II (Springer, Berlin 1925 [Grundlehren der mathematischen Wissenschaften]), siehe Abschnitt V, Kapitel 1, Aufgaben 7 und 15. (Siehe auch Aufgabe 13.)

²⁾ L. COLLATZ, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen* (Geest und Portig KG., Leipzig 1949), S. 289.

bilde man die Quotienten

$$q_i = \frac{v_i}{u_i a_{ii}}.$$

Sind sämtliche q_i positiv, so liegt die k -te charakteristische Zahl zwischen $\text{Max}(q_i)$ und $\text{Min}(q_i)$.

Auch den Collatzschen Einschliessungssatz für Differentialgleichungen¹⁾ kann man mit Hilfe der klassischen analytischen Oszillationssätze in analoger Weise modifizieren. Bei den anderen bekanntesten Einschliessungsverfahren, namentlich bei denen, die sich auf den Rayleighschen Quotienten beziehen, ist jedoch eine solche Modifikation nicht ohne weiteres möglich.

Summary

Conditions on a linear algebraic eigenvalue problem are given, under which there are exactly $k - 1$ changes of sign in the sequence of components of the k -th eigenvector. This is analogous to the oscillation theorems of differential equations. A class of difference equations which satisfies these conditions is defined. Finally a modification of a method of COLLATZ is given, by means of which upper and lower bounds for the k -th eigenvalue may be derived from a trial vector having $k - 1$ sign changes in the sequence of its components. This paper is merely a summary of results; no proofs are given.

(Eingegangen: 29. September 1953.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 20. bis 24. April 1954, in München

Die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GaMM) wird ihre nächste Jahrestagung in *München* in der Zeit vom 20. bis 24. April 1954 veranstalten. Die örtliche Tagungsleitung wird in Händen von Prof. Dr. J. HEINHOLD (Technische Hochschule München) liegen.

H. GÖRTLER

Internationale Tagung über Halbleiter in Amsterdam vom 29. Juni bis 3. Juli 1954

Die Niederländische Physikalische Gesellschaft, mit Unterstützung der Union internationale de Physique pure et appliquée und der Unesco, hat die Absicht, vom 29. Juni bis 3. Juli 1954 in Amsterdam eine *Internationale Tagung über Halbleiter* durchzuführen.

Die folgenden Forscher (von denen zwei unter Vorbehalt) haben zugesagt, Hauptvorträge zu übernehmen: J. BARDEEN, W. H. BRATTAIN, H. B. G. CASIMIR, F. A. KRÖGER, D. POLDER, M. SCHÖN, W. SHOCKLEY, R. A. SMITH, H. J. VINK, H. WELKER. Hauptthemen der Tagung sind: Volumenrekombination;

¹⁾ L. COLLATZ, a. a. O., S. 126.

Oberflächenleitfähigkeit; Oberflächenhaftstellen; Oberflächenrekombination; intermetallische Verbindungen; das Bändermodell für polare und nichtpolare Halbleiter; Photoleitfähigkeit in Halbleitern wie PbS, PbTe, PbSe, ZnS, CdS; die Anwendung allgemeiner physikalischer und chemischer Gesetze auf die Herstellung von Halbleitern mit spezifischen Eigenschaften.

Ferner sind Fachausschuss-Sitzungen vorgesehen zur näheren Erörterung von Einzelheiten. In diesen Sitzungen können auch kleinere Referate (15 Minuten) aus den verschiedenen Gebieten gehalten werden. Im weitern sind einige Ausflüge beabsichtigt.

Interessenten, welche dieser Tagung beiwohnen möchten oder einen Beitrag zu geben wünschen, werden gebeten, sich so bald wie möglich an den Tagungssekretär (Dr. H. J. VINK, Floralaan 142, Eindhoven, Holland) zu wenden.

H. J. VINK

Errata

Experimentelle Untersuchung von Vereisungserscheinungen. Von DOMENIC MELCHER (ZAMP 2, Fasc. 6, 421 [1951]).

Auf Seite 432 wird die während einer Vereisung an einem Kabel auftretende Temperaturerhöhung berechnet.

Der Wärmeentzug durch den Luftstrom ergibt sich rechnerisch zu

$$Q_L = \alpha f \Delta T \sim 65,2 \cdot 10^{-3} \text{ cal s}^{-1},$$

wobei für ΔT die ohne Wärmeabfluss pro Sekunde zu erwartende Temperaturerhöhung eingesetzt wurde. Bei der Umrechnung der Wärmeübergangszahl ist leider ein Fehler im Betrag von zwei Zehnerpotenzen unterlaufen.

Q_L fällt also hundertmal kleiner aus, als angegeben, und wird nicht von gleicher Größenordnung wie die frei werdende Kristallisationswärme Q_K . Damit wird im stationären Fall die gesuchte Temperaturerhöhung richtig von der Größenordnung einiger Zehntelgrad.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Statik der rahmenartigen Tragwerke. Von J. PIRLET (Springer-Verlag, Berlin 1951). 168 S., 80 Abb.; DM 24.–.

Der Verfasser behandelt die Berechnung von «rahmenartigen Tragwerken», die sich aus elastisch eingespannten Balken oder Stäben zusammensetzen und deren Knotenpunkte wohl elastisch verdrehbar, aber unverschieblich sind. Die Berechnung dieser hochgradig statisch unbestimmten Systeme wird schrittweise durchgeführt; wird nur ein einziges Balkenfeld als belastet betrachtet, so ergeben sich seine beiden Einspannmomente aus den «Einspannungsgraden» der beiden Stabenden, die ihrerseits schrittweise, von den Auflagerpunkten ausgehend, berechnet werden können. In umgekehrter Richtung kann anschliessend die «Fort-

pflanzung» der Momente gefunden werden. Aus dem Umstand, dass die Einspanngrade eines Feldes durch kleine Änderungen der Einspanngrade der anschliessenden Stäbe nur unwesentlich beeinflusst werden, lässt sich ein vereinfachtes Berechnungsverfahren durch angenäherte Bestimmung der Einspanngrade aufstellen. Das Erfreuliche an diesem Buche liegt darin, dass es auf den Grundlagen der klassischen Baustatik aufbauend zu einer klaren, übersichtlichen und strengen Berechnung der untersuchten besonderen Tragwerksform gelangt.

F. Stüssi

Elasticity in Engineering. By ERNEST E. SECHLER (John Wiley & Sons, New York, 1952). 419 Seiten, mit vielen Abbildungen; \$8.50.

Dieses Buch – es ist das neueste aus der CALCIT-Serie (Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology) – ist für Ingenieure bestimmt, die auf allen Gebieten der höheren Festigkeitslehre arbeiten.

Das Buch besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil werden die gebräuchlichen Beziehungen in verschiedenen Koordinatensystemen hergeleitet, welche für zwei- und dreidimensionale Probleme das Gleichgewicht, die Verträglichkeit und die elastische Energie ausdrücken. Ferner wird der Begriff der Spannungsfunktion eingeführt. Der zweite Teil befasst sich mit Systemen, die sich im stabilen Gleichgewicht befinden. Hier werden zweidimensionale Probleme, Balkenbiegung, statisch unbestimmte Fachwerke, Torsion von Wellen, behandelt und die Grundgleichungen der Platten- und Schalentheorie diskutiert. Der dritte Teil umfasst Instabilitätsprobleme bei gedrückten Säulen, gedrückten und gebogenen Balken sowie bei Platten und Schalen.

Das Buch setzt offensichtlich wenig Vorbildung voraus. Obschon die Auswahl des Stoffes im allgemeinen dem Zweck entspricht, scheint es dem Referenten, dass gewisse elementare Dinge, wie der Mohrsche Satz über die elastische Linie und die Lösung einfacher statisch unbestimmter Probleme, eher in ein Buch über elementare Festigkeitslehre gehören.

Das Buch ist dadurch gekennzeichnet, dass die Zwischenrechnungen bei der Aufstellung einer Gleichung oder bei der Lösung eines Beispiels stets *in extenso* aufgeführt werden. Andererseits wäre es zu begrüssen, wenn der begleitende Text die physikalischen Aspekte besser herausarbeiten würde. Die am Ende jedes Kapitels zusammengestellten Übungsaufgaben sind dagegen äusserst wertvoll.

E. P. Popov

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von K. FEDERHOFER (Springer-Verlag, Wien 1950/51). I. Teil: *Statik*, 130 S., 243 Abb.; sFr. 10.—. II. Teil: *Kinematik und Kinetik des Punktes*, 103 S., 105 Abb.; sFr. 10.—. III. Teil: *Kinematik und Kinetik starrer Systeme*, 139 S., 191 Abb.; sFr. 10.—.

Die vorliegende Aufgabensammlung zur Mechanik ist in drei getrennt erscheinene Teile gegliedert, von denen der erste der Statik, der zweite der Kinematik und Kinetik des Punktes und der dritte der Kinematik und Kinetik starrer Systeme gewidmet ist. Jeder Teil enthält getrennt die Aufgaben und ihre Lösungen, wobei den letzteren eingehende Erläuterungen über den zweckmässigen Lösungsweg, die stellenweise den Charakter eigentlicher Darstellungen der behandelten Probleme annehmen, vorangestellt werden. Die erfolgreiche Beherrschung und Anwendung der Lehren der Mechanik setzt eine selbständige Erarbeitung des Stoffes voraus; dazu kann die Beispielsammlung K. FEDERHOFERS,

die im Laufe von drei Jahrzehnten erfolgreicher Lehrtätigkeit entstanden ist, eine wertvolle Hilfe sein.

F. Stüssi

Grundlagen der Elektroakustik. Von W. REICHARDT (Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG., Leipzig 1952). 464 S., 311 Abb.; DM 32.–.

Das vorliegende umfangreiche Werk ist ein eigentliches Handbuch der Elektroakustik und bietet mehr als nur eine Einführung in die Grundlagen dieses Gebietes, wie im Vorwort allzu bescheiden bemerkt ist. Dies zeigt schon das umfangreiche Literaturverzeichnis mit über 400 Hinweisen, das allerdings keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen kann und will.

Der erste Teil des Buches behandelt die Grundlagen der physikalischen Akustik. Gleich zu Anfang wird vorgeschlagen, den allgemein bekannten und gebräuchlichen Begriff der akustischen Impedanz durch den Ausdruck «Schallwellenstandwert» zu ersetzen; die selten verwendete akustische Admittanz wird «Schallwellenmitgang» genannt. Die Wünschbarkeit, eine international eingeführte und bewährte Terminologie durch rein deutsche neue Ausdrücke zu ersetzen, kann füglich bezweifelt werden. Ferner ist der Versuch, die Schalldämmung zusammen mit Reflexion, Beugung, Brechung und Ausbreitung in der Atmosphäre zu behandeln, nicht nur aus wissenschaftlichen, sondern vor allem auch aus didaktischen Gesichtspunkten abzulehnen. Der Zusammenhang des Kapitels «Nichtlinearitäten», das den ersten Teil des Buches abschliesst, mit der übrigen Materie ist schwer einzusehen.

Als weiterer Hauptabschnitt folgt «Das Schallempfinden des Menschen», in dem sich schöne Darstellungen über den Aufbau und die wichtigsten Eigenschaften des Ohres finden. Trotz dem recht beachtlichen Umfang des Kapitels «Lautstärke» vermisst man aber Angaben über die praktisch wichtige Lautstärkeberechnung sowie besonders auch über Verständlichkeitsberechnungen, die heute in der Technik mehr und mehr Eingang finden. Die Darstellung der resultierenden Lautstärke mehrerer Schallquellen ist leider bei der viel zu primitiven Vorstellung einer energiemässigen Addition stehengeblieben.

Der vierte Teil des Buches ist den Schallwandlern gewidmet, wobei zuerst die Kolbenmembran, insbesondere ihre Richtwirkung zur Sprache kommt. Ein umfangreiches Kapitel, «Mechanische Schwingungsgebilde», behandelt im wesentlichen nur den schwingenden Massenpunkt, wobei die mechanisch-elektrischen Analogien sehr breit diskutiert werden. Leider fehlt die Behandlung von kontinuierlichen Schwingungsgebilden, wie zum Beispiel die gespannte Membran und die eingeklemmte Platte, die im Wandlerbau wichtige Elemente sind. Anschliessend folgen die Kontaktmikrophone, das Telephon, der elektromagnetische Lautsprecher, die elektrodynamischen Mikrophone in ihren verschiedenen bekannten Varianten, der elektrodynamische Lautsprecher, das Kondensatormikrophon und schliesslich das Kristallmikrophon, eine Systematik der Behandlung, die nicht immer glücklich ist.

Im Abschnitt «Mikrophoneinsatz» vermittelt der Verfasser offensichtlich eigene wertvolle Erfahrungen; ganz am Rande wird hier auch die statistische Raumakustik noch gestreift. Auch das folgende Kapitel, «Beschallungstechnik», bringt viel wertvolles Material, wobei besonders die in den letzten Jahren immer häufiger verwendeten Strahlergruppen erwähnt seien. Schade, dass hier nicht auch der sogenannte «Haas-Effekt» aufgeführt wird, der eine der wichtigsten neueren Erfahrungen auf diesem Gebiete ist.

Das Buch schliesst mit der Behandlung der Schallaufzeichnung, wobei das Schwergewicht richtigerweise auf dem Grammophon und dem Magnetophon liegt.

Im ganzen Buche wird konsequent das Giorgi-Maßsystem angewendet, über das eine vorzügliche klare und kurze Einleitung vorhanden ist. Der schon eingangs erwähnte Dualismus zwischen Handbuch einerseits und elementaren Grundlagen andererseits muss zu einigen Widersprüchen führen, die die Lektüre des Buches erschweren. Seine didaktischen Mängel lassen es als Lehr- und Studienmittel weniger geeignet erscheinen, dagegen wird es dem in der Praxis stehenden Ingenieur und Techniker ein sehr willkommenes Hilfsmittel sein und ihm wertvolle Unterlagen und Anregungen vermitteln.

W. Furrer

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von K. FEDERHOFER (Springer-Verlag, Wien 1950). 179 S., 35 Abb.; sFr. 23.50.

Der Verfasser unternimmt es hier, zu untersuchen, wie sich die Besonderheiten der Biegung und Verdrehung, wie sie bei unsymmetrischen offenen Querschnitten auftreten und die durch den Begriff des Schubmittelpunktes charakterisiert werden können, auf die Eigenschwingungen gekrümmter Stäbe auswirken. Es liegt in den Schwierigkeiten der Integration der bei der mathematischen Formulierung des Problems auftretenden Differentialgleichungen begründet, dass die Untersuchung von einschränkenden Voraussetzungen (kreisförmige Bogenachse, konstanter Querschnitt) ausgehen muss; die Einflüsse von Abweichungen gegenüber diesen Voraussetzungen können ergänzend untersucht werden. Das Buch FEDERHOFERS stellt eine willkommene erste Verbindung zwischen der verallgemeinerten Biegelhre und der Dynamik des gekrümmten Stabes her.

F. Stüssi

Theoretical Nuclear Physics. By J. M. BLATT and V. F. WEISSKOPF (John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, 1952). 864 pp.; \$12.50.

Von einem grundsätzlichen Verständnis der im Kern wirkenden Kräfte sind wir noch weit entfernt, und eine Deutung der Phänomene ist deshalb nicht, wie etwa in der Atomphysik, ein rein mathematisches Problem auf Grund wohldefinierter physikalischer Vorstellungen. Vielmehr müssen für jeden Problemkreis eigene Modelle erdacht werden, die eine möglichst weitgehende Beschreibung der betreffenden Phänomene erlauben, deren Zusammenhang jedoch oft dunkel ist und einer späteren Synthese überlassen bleiben muss. Aus diesen die bewährten und hoffnungsvollen herauszuschälen und in eine einheitliche Darstellung zu gießen, ist ein Unterfangen, das nur bei tiefgehender Kenntnis des Gebietes erfolgreich sein kann. Den Verfassern des vorliegenden Buches ist das völlig gelungen; sie haben ein Werk geschaffen, das sowohl als Lehrbuch für Studierende wie als Nachschlagewerk für experimentelle und theoretische Physiker einzig dasteht.

Das Buch gliedert sich im wesentlichen in vier Teile. In einem ersten Teil (Kapitel I bis VII und XIV) wird, in induktivem Aufbau von einfacheren zu komplizierteren Systemen, versucht, möglichst viel Information über die Kernkräfte zu gewinnen. Theoretische Spekulationen über die Natur dieser Kräfte (im Sinne der Mesontheorie) fehlen, da der heutige Stand der Feldtheorien es nicht gestattet, irgendwelche quantitativen Folgerungen aus solchen zu ziehen. Konsequenterweise ist auch eine Diskussion der experimentellen Tatsachen der Mesonenphysik unterblieben; das Buch beschränkt sich auf das Gebiet kleiner Energien (< 50 MeV), mit Ausnahme eines Kapitels über die Nukleonstreuung bei hohen Energien, welche eines der Haupträtsel der Kernphysik bildet. Ein zweiter Teil (Kapitel VIII bis XI) behandelt die allgemeine Theorie der Kernreaktionen. Ausser einigen exakten Theoremen handelt es sich hierbei vor allem

um eine phänomenologische Beschreibung der Tatsachen auf Grund einiger fundamentaler Annahmen (Compoundkern). Ein dritter Teil (Kapitel XII) enthält die Theorie der Wechselwirkung von Kernen mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld (γ -Strahlen). Dieser Abschnitt ist besonders bemerkenswert, da er viel bisher unpubliziertes Material enthält, welches zum Teil auch Irrtümer älterer Arbeiten klarstellt. Ausserdem zeichnet er sich durch einen besonders eleganten Formalismus zur Beschreibung von Multipolstrahlung aus. Der vierte Teil endlich (Kapitel XIII) behandelt den β -Zerfall. Auch hier ist viel Konfusion in der älteren Literatur vermieden durch konsequente Unterscheidung der «verbotenen» und der «relativistischen» Übergänge.

Das ganze Werk ist leicht zu lesen, und trotz weitgehend strenger mathematischer Behandlung werden dem Leser lange formale Rechnungen erspart, eventuell durch Vorführen vereinfachter, aber typischer Beispiele. (Ob allerdings die weitere Tendenz, jedes formale Resultat durch eine «anschauliche» Plausibilitätsbetrachtung nochmals herzuleiten, nicht etwas übertrieben wird, mag Geschmacksache sein). Ausführliche Tabellen der verwendeten Symbole erleichtern das Nachschlagen sehr. Das Buch wird wohl auf Jahre das Standardwerk über theoretische Kernphysik bleiben.

R. Schafroth

Physik dünner Schichten, Teil I: Herstellung, Dickenmessung und optische Eigenschaften. Von HERBERT MAYER (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft MbH., Stuttgart 1950). 326 S., 142 Abb.; sFr. 37.50.

Dünne Schichten spielen heute auf vielen Gebieten der Technik eine bedeutende Rolle. Als Beispiel seien die reflexvermindernden Schichten in der Optik genannt. Die Vergütung von Objektiven ist in den letzten Jahren zur Selbstverständlichkeit geworden. Insbesondere bei Objektiven mit grösserer Linsenzahl ist diese Vergütung von grosser Bedeutung, indem sie einen beträchtlichen Lichtgewinn mit sich bringt.

Im vorliegenden Werk, Band 4 der Sammlung «Physik und Technik», wird erstmalig eine zusammenfassende Darstellung der Physik der dünnen Schichten gegeben.

Nach einem Überblick über die historische Entwicklung und einer Bestimmung des Begriffes «dünne Schicht» wird im zweiten Kapitel eine Übersicht über die wichtigsten Verfahren zur Herstellung dieser Schichten gegeben: Aufdampfen, Kathodenzerstäubung, Adsorption usw.

Im nächsten Kapitel werden die Verfahren zur Messung der Dicke dünner Schichten behandelt: mechanische Messung, elektrische Methoden, chemische Verfahren und optische Methoden. Die letzten Methoden umfassen dabei: Interferenzfarben-, Interferenzstreifen-, Intensitäts- und Polarisationsmethode. Im gleichen Kapitel wird ferner die wichtige Grösse der Oberflächenrauigkeit behandelt.

Im vierten Kapitel werden dann die Grundlagen der Optik dünner Schichten dargestellt und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen: homogene Schichten, ihre Reflexions- und Absorptionsvermögen sowie ihre Durchlässigkeit, inhomogene und anisotrope Schichten. Es werden die Methoden zur Bestimmung der optischen Konstanten dieser Schichten dargelegt. Schliesslich geht der Autor auf Anwendung dünner Schichten in der Optik ein: Erhöhung und Verminderung der Reflexion durch dünne Schichten, dünne Schichten als Interferenzfilter sowie als Polarisatoren.

Das Werk ist mit 142 Abbildungen reich illustriert. Es besitzt einen Anhang mit 20 wichtigen Tabellen über Reflexionsvermögen, Absorptions- und Brechungs-

index von häufig verwendeten Metallen. Das Literaturverzeichnis mit über 600 Hinweisen auf Arbeiten auf dem Gebiete dünner Schichten ist sehr vollständig.

Im vorliegenden Werk ist eine klare Darstellung über das wichtige Gebiet der dünnen Schichten gegeben. Wir möchten es jedem, der auf diesem Gebiete tätig ist oder sich in dieses einarbeiten will, voll empfehlen.

N. Schaetti

Zur Struktur und Materie der Festkörper. Diskussionstagung der Sektion für Kristallkunde der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft (Springer-Verlag, Berlin 1952). 304 S., 95 Abb.; DM 28.60.

Die an der Diskussionstagung der Sektion für Metallkunde der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft am 1. und 2. Mai 1951 in Frankfurt am Main gehaltenen Vorträge sowie die zugehörigen Diskussionsbeiträge sind in Buchform herausgekommen. Ähnlich wie der Band *Der feste Körper* der Zürcher Tagung (1938) zeigt dieses Buch einen Querschnitt durch den heutigen Stand der Kenntnisse und Probleme der reinen und angewandten Kristallstrukturforschung. Beiträge zur allgemeinen Symmetrie- und Strukturlehre lieferten P. NIGGLI (*Einführung von Charakterentafeln für Fourier- und Patterson-Analyse*), C. HERMANN (*Translationsgruppen in n Dimensionen*) und R. HOSEMAN (*Versuch einer allgemeinen Interferenztheorie, speziell im Hinblick auf Parakristalle, hochmolekulare und kolloide Stoffe*). Die Wachstumstheorie wurde durch W. KOSSEL beleuchtet (*Beobachtung von Kristallkugeln als Forschungsmittel für Oberflächenvorgänge*) und durch I. N. STRANSKI und Mitarbeiter aufs wertvollste ergänzt mit einer Arbeit über die Verdampfung von Kristallen. Ins Gebiet der Realbauforschung fällt der Beitrag von H. JAGDZINSKI, der die kooperative Fehlordnung in Kristallen theoretisch beleuchtete. Aus der physikalisch-chemischen Kristallforschung berichtete einerseits H. WITTE (*Einfluss der Brillouin-Zonen auf die Eigenschaften von Legierungen*), in der Diskussion durch K. SCHUBERT noch wesentlich ergänzt, und andererseits A. SMEKAL, der die aus der Kristallchemie stammenden Erkenntnisse über die Bindungsverhältnisse auf die Gläser anwandte und versuchte, eine bindungsmässige Theorie des Glaszustand-Vorkommens zu geben. Diese kurzen Hinweise auf den Inhalt der Einzelkapitel mögen genügen, um zu zeigen, dass hier eine wertvolle Zusammenstellung modernster kristallographisch-physikalisch-chemischer Arbeiten vorliegt, die jedem mit Kristallen arbeitenden Chemiker, Physiker und Mineralogen gewinnbringend sein werden.

W. Epprecht

Introductory Nuclear Physics. By D. HALLIDAY (J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1950). 558 pp.; \$6.50.

Dieses Buch stellt eine klare und leichtverständliche Einführung in die moderne Kernphysik dar. Es enthält in knapper und einfacher Formulierung sowohl die wichtigsten theoretischen Vorstellungen, die man sich heute über den Aufbau der Kerne sowie den Mechanismus der Kernumwandlungen macht, als auch eine Beschreibung der grundlegenden Experimente, welche zu diesen Vorstellungen geführt haben. Auch die für ein Verständnis der Kernvorgänge unerlässlichen Nachbarggebiete, wie Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie, sowie kosmische Strahlen kommen kurz zur Behandlung. Zwei weitere Abschnitte befassen sich mit den experimentellen Methoden zum Nachweis geladener Partikel und Quanten sowie der künstlichen Erzeugung energiereicher Teilchen. Der Leser – als solcher kommt für dieses Buch der Studierende mittlerer Semester wie auch der in der Praxis stehende Ingenieur mit physikalischen Interessen in Frage – erfährt damit alles Wesentliche, das er für eine erste Orientierung wie auch für ein nachfolgendes detailliertes Studium auf diesem Gebiet benötigt.

H. Wäffler

ELEKTRONENMIKROSKOPE
MIKROTOME
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

Neuerscheinung

RICHTER

Elektrische Maschinen

BAND III

Die Transformatoren

Berichtigte und ergänzte Neuauflage 1954. 350 Seiten mit
240 Figuren. Ganzleinen Fr. 26.—.

A. Magnetisierungserscheinungen – B. Streuungserscheinungen
C. Überspannungserscheinungen – D. Betriebseigenschaften
E. Sonderschaltungen – F. Spannungsregelung – G. Experimentelle Untersuchung – H. Aufbau des Transformators
I. Kühlung und Erwärmung – K. Beanspruchung und Wahl der Isolierung – L. Entwurf.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL/STUTT GART

Wissenschaftliche Zeitschriften **aus dem Verlag Birkhäuser, Basel/Stuttgart**

Technica, Illustrierte technische Zeitschrift. Erscheint vierzehntäglich. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 14.40, Ausland Fr. 18.—. Einzelnummer 60 Rp., Ausland 75 Rp.

Helvetica Physica Acta. Edita a Societate Physica Helvetica. Erscheinen seit 1928. 23 × 15,5 cm. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 44.—; Ausland Fr. 52.—; Einzelnummer Fr. 11.—.

Archiv der Mathematik. Herausgegeben von *H. Kneser* und *W. Süss*. Erscheint sechsmal jährlich, seit 1948. 24 × 17 cm. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 60.—; Einzelnummer Fr. 12.—.

Elemente der Mathematik. Revue de mathématiques élémentaires. Rivista di matematica elementare. 24 × 16,5 cm. Erscheinen alle 2 Monate. Jährlich Fr. 10.—, Ausland Fr. 14.—; Einzelnummer Fr. 2.50.

Experientia. Revue mensuelle des sciences pures et appliquées. Monatsschrift für das gesamte Gebiet der Naturwissenschaft. Rivista mensile di scienze pure e applicate. Monthly Journal of Pure and Applied Science. Editores: *A. v. Murali*, Bern – *L. Ruzicka*, Zürich – *J. Weigle*, Genève. Erscheint seit 1945. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 32.—, Ausland Fr. 38.—, Einzelnummer Fr. 3.50.

Schweizerische paläontologische Abhandlungen – Mémoires suisses de paléontologie. Herausgegeben von der Schweizerischen Paläontologischen Gesellschaft. Erscheinen seit dem Jahre 1874, pro Jahr durchschnittlich ein Band, 32 × 24 cm. Preis pro Band Fr. 75.—.

Eclogae Geologicae Helvetiae. Herausgegeben von der Schweizerischen Geologischen Gesellschaft. Erscheinen seit 1888. 24,5 × 17 cm. Jährlich 1 Vol. mit 2 Hefen à ca. Fr. 20.— (je nach Umfang).

Schweizerische Zeitschrift für Hydrologie. Revue suisse d'Hydrologie. Herausgegeben von der Hydrobiologischen Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Jährlich erscheinen 2 Hefte, seit 1920. Abonnementspreis: Inland Fr. 24.—, Ausland Fr. 28.—.

Verlangen Sie bitte unverbindlich eine Gratis-Probenummer

clichés
in jeder Technik



SCHWITTER
A-G
BASEL / ZÜRICH

Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

Mathematik

BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen . . .	geb. Fr. 18.70
BLASCHKE, W.: Projektive Geometrie	geb. Fr. 19.60
BLASCHKE, W.: Analytische Geometrie	geb. Fr. 19.60
CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. I geb. Fr. 39.50, Bd. II	geb. Fr. 27.05
CARATHÉODORY, C.: Mass und Integral und ihre Algebraisierung .	erscheint 1954
DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I:	
Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation . .	geb. Fr. 83.20
FINSLER, P.: Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen . . .	geb. Fr. 15.40
FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes .	geb. Fr. 24.95
HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie	geb. Fr. 17.—
HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände	geb. je Fr. 54.10
LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage 1951	geb. Fr. 31.20
LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung	geb. Fr. 49.90
LOCHER-ERNST, L.: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven	geb. Fr. 12.50
OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Diff.- u. Integralrechng., Band I	geb. Fr. 36.40
(Band III erscheint demnächst) Band II	geb. Fr. 69.70
SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I	geb. Fr. 56.15
(Band III in Vorbereitung) Band II	geb. Fr. 56.15
STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie	geb. Fr. 29.65
TROST, E.: Primzahlen	brosch. Fr. 13.50
VOELKER, D., DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transf.	geb. Fr. 47.85
ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik	geb. Fr. 31.20

Physik und Astronomie

GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenpro-	
blems der Wellenmechanik	geb. Fr. 33.30
NIETHAMMER, TH.: Astronomisch-geogr. Ortsbestimmung	geb. Fr. 36.40
VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen	geb. Fr. 39.50
WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik	geb. Fr. 49.40
Kongressbericht der Internat. Konferenz über Kernphysik und	
theoretische Physik, Basel 1949.	Broschiert Fr. 16.65

Ingenieurwissenschaften

BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert	Fr. 28.10
GOLDSTEIN, J.: Die Messwandler	geb. Fr. 29.10
JAEGER, CH.: Technische Hydraulik	geb. Fr. 52.—
KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge	
der Theorie der Wechselströme u. des einphasigen Transformators	geb. Fr. 27.55
Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen . .	geb. Fr. 74.90
MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der star-	
ren, flüssigen und elastischen Körper	geb. Fr. 37.45
Band II: Dynamik der starren Körper	geb. Fr. 33.80
Band III: Dynamik der Systeme	geb. Fr. 46.80
MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene	geb. Fr. 13.50
SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie	geb. Fr. 15.10
STÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I	geb. Fr. 40.05
RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge	geb. Fr. 31.20
RICHTER, R.: Elektrische Maschinen	geb. Fr. 49.40
Band II geb. Fr. 46.80, Band III	geb. Fr. 26.—
VIDMAR, M.: Die Gestalt der elektrischen Freileitung	geb. Fr. 19.75

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL/STUTTGART